DELLE ALTEZZE

BAROMETRICHE

SAGGIO ANALITICO.

DELLE ALTEZZE

BAROMETRICHE,

E

DI ALCUNI INSIGNI PARADOSSI

Relativi alle medesime

SAGGIO ANALITICO

Con alcune Riflessioni Preliminari intorno

ALL' APPLICAZIONE

DELLE MATEMATICHE ALLA FISICA

DEL P. GREGORIO FONTANA

Delle Scuole Pie

Pubblico Professore di Matematica nella Regia Università di Pavia, Socio dell' Accademia dell' Instituto di Bologna.

IN PAVIA.

Per Giuseppe Bolzani Impressore della Regia Città. *Con permissione.*

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR CONTE

CARLO DE FIRMIAN

DI CRONMETZ, MEGGEL,
E LEOPOLDSCRON;
CAVALIERE DELL' INSIGNE ORDINE
DEL TOSON D' ORO;
CIAMBERLANO, E CONSIGLIERE
INTIMO ATTUALE DI STATO
DELLE LL. MM. II., E REALE A.;
SOPRAINTENDENTE GENERALE
E GIUDICE SUPREMO
DELLE REGIE POSTE D'ITALIA,
DELLE MILIZIE NAZIONALI,
E DEL CENSIMENTO
DELLO STATO DI MILANO;
VICE-GOVERNATORE DEL DUCATO
DI MANTOVA EC.;
E MINISTRO PLENIPOTENZIARIO
PER S. M. I., E R. A.
PRESSO IL GOVERNO GENERALE
NELLA LOMBARDIA AUSTRIACA.

ECCELLENZA

N*El tenue tributo di venerazione, che ardiſco ora preſentare a V. E., io non preſumo di rendere un omaggio proporzionato*

to alla di LEI naſcita, al rango, e alle ſublimi SUE dignità; ma intendo unicamente di onorare me ſteſſo. La Filoſofia ſa riſpettare l' eſterno ſplendore di queſta pompa; ma ſa altresì penetrare al di là di queſti ornamenti ſtranieri, e rimirar l' Uomo tale qual è. Niuno ha da temere meno

no di V. E. la ſeverità degli ſguardi del Filoſofo, l' occhio penetrante del Pubblico, e il giudizio inappellabile della Poſterità. Protettore, e giudice d' ogni Bell' Arte, grande per tanti fregj eſteriori, più grande in VOI ſteſſo, ſuperiore ad ogni ſorta di gloria, e acclamato dalle VOSTRE virtù

tù VOI ſarete in ogni tempo celebrato dalla Fama come il modello de' Miniſtri, e le delizie de' Filoſofi.

Io ſono con profondiſſimo oſſequio

Di V. E.

Umiliſs, Obbligatiſs., Devotiſs. Serv.
Greg. Fontana.

A chi vorrà leggere.

L' Inſcrizione poſta ſull' ingreſſo dell' antica Accademia Ο'ΥΔΕΙ'Σ ΑΓΕΩ-
ΜΕ'ΤΡΗΤΟΣ Ε'ΙΣΙ'ΤΩ pare og-
gimai doverſi pigliar per epigra-
fe da chiunque imprende a di-
ſcutere qualunque ſiaſi fiſico *rigo-
roſo* Argomento. Quello, che ora
per altrui inſinuazione qui aſſog-
gettiamo al giudizio del Pubbli-
co, è un di que' pochi, che facili
e piani alla prima apparenza,
ſembrano poterſi pienamente
dilucidare col ſolo ajuto della
Matematica Elementare. Ma
la lettura di queſto Saggio mo-
ſtrerà con evidenza il contrario.
Si ſcorgerà di leggieri, che

ſenza

ſenza il ſoccorſo della più Alta Geometria, e dell' Analiſi più ſublime non era poſſibile di penetrare e inſinuarſi per tanti naſcondiglj e receſſi, che incontra a ogni paſſo chi vuol per poco internarſi nella queſtione, e ſcandagliarne la profondità.

Vi è un' arte di render difficile quello che è facile; e non mancano de' Geometri, i quali conoſcono mirabilmente queſt' arte. Ma noi ci luſinghiamo, che queſto non debba eſſere il caſo noſtro. La difficoltà del noſtro ſoggetto noi ve la abbiamo trovata, non poſta; e quindi ci ſiamo ingegnati mercè gli opportuni ſuſſidj di toglierla.

In tanto poſſiamo atteſtare con verità, che lontani per natura e per abito dalla va-

nità

nità di voler correre per le stampe, senza le persuasioni replicate di due illustri Geometri, uno Veronese, l' altro Toscano non ci saremmo mai indotti a donare a questo Saggio altra esistenza fuori di quella, che già aveva nell' Enciclopedia di Livorno, per cui era stato unicamente composto. Se esso merita questa nuova esistenza, il Pubblico ci saprà grado di avergliela data; se non la merita, ci perdonerà almeno di esserci ingannati con due insigni Filosofi, al giudizio de' quali non vi è forse alcuno, che volesse ricusare di sottoscriversi. In fine se il libro è buono, gioverà a qualche cosa; se è cattivo, a nessun altro recherà pregiudizio fuorchè a chi l' ha fatto.

La Geometria e l' Algebra ſono
la Logica della vera Fiſica.
BOUGUER *Traitè d' Opt.*
ſur la Gradat. de la Lum.

RIFLESSIONI
PRELIMINARI
INTORNO ALL' APPLICAZIONE
DELLE MATEMATICHE
ALLA FISICA.

SE una formola d' Algebra non è sempre una fisica verità; una gran parte però delle verità della Fisica è il risultato di poche formole d'Algebra. Dopo la grand' epoca della rivoluzione filosofica dell' anno 1687., in cui comparve per la prima volta alla luce l'Opera de' *Principj* di Newton, non è più permesso di dubitare, se l' Analisi,

e la Geometria possano applicarsi con frutto alla Fisica, e se quest' ultima per lo innanzi chimerica e romanzesca abbia cominciato in allora a meritare il nome di Scienza della Natura. Tutta l'eloquenza dell'illustre Metafisico (*a*), e dell' incom-

(*a*) ,,Une des vérités qui ayent été annoncées de nos jours avec le plus de courage & de force, qu' un bon Physicien ne perdra point de vue, & qui aura certainement les suites les plus avantageuses; c' est que la région des Mathématiciens est un Monde intellectuel, où ce que l' on prend pour des vérités rigoureuses perd absolument cet avantage quand on l' apporte sur notre terre. On en a conclu que c' étoit à la philosophie expérimentale à rectifier les calculs de la géométrie, & cette consequence a été avouée même par les géométres. Mais à quoi bon corriger le calcul géométrique par l' expérience? N' est il pas plus court de s' en tenir au résultat de celle-ci? d' où l' on voit que les mathématiques, transcendantes sur-tout, ne conduisent à rien de pércis, sans l' expérience; que c'est une espéce de métaphysique générale où les corps sont dépouillés de leurs qualités individuelles, & qu' il resteroit au moins à faire un grand ouvrage qu' on pourroit appeller *l' Application de l' expérience à la géométrie*, ou

Incomparabile Storico o Dipintore della
A 2 Na-

ou *Traité de l' aberration des mesures*. Je ne sçai s'il y a quelque rapport entre l' esprit du jeu & le génie mathématicien ; mais il y en a beaucoup entre un jeu & les mathématiques. Laissant à part ce que le sort met d'incertitude de d' un côté, ou le comparant avec ce que l' abstraction met d' inexactitude de l' autre, une partie de jeu peut être considérée comme une suite indéterminée de problêmes à résoudre après des conditions données. Il n' y a point de questions de mathématiques à qui la même definition ne puisse convenir ; & la *Chose* du mathématicien n' a pas plus d' existence dans la nature que celle du joueur. C' est de part & d' autre une affaire de conventions. Lorsque les géométres ont décrié les métaphysiciens, ils étoient bien éloignés de penser que toute leur science n' étoit qu' une métaphysique. On demandoit un jour : Qu' est ce qu' un métaphysicien ? Un géométre répondit : C' est un homme qui ne sçait rien. Les chymistes, les physiciens, les naturalistes, & tous ceux qui se livrent à l' art experimental, non moins outrés dans leur jugement, me paroissent sur le point de vanger la métaphysique, & d' appliquer la même définition au géométre. Ils disent : A quoi servent toutes ces profondes théories des corps célestes, tous ces énormes calculs de l' astronomie

Natura (*b*), i quali hanno tentato in que-

mie rationelle, s' ils ne dispensent point Bradley ou le Monnier d'observer le ciel? .... Nous touchons au moment d' une grande revolution dans les sciences. Au penchant que les esprits me paroissent avoir à la morale, aux belles-lettres, à l' histoire de la Nature & à la physique expérimentale, j'oserois presque assurer qu'avant qu'il soit cent ans, on ne comptera pas trois grands géométres en Europe. Cette science s' arrêtera tout court, où l' auront laissé les Bernoulli, les Euler, les Maupertuis, les Clairaut, les Fontaine & les d' Alembert. Ils auront posé les colonnes d' Hercule. On n' ira point au-delà. Leurs ouvrages subsisteront dans les siécles à venir, comme ces piramides d' Egypte dont les masses chargées d' hiérogliphes réveillent en nous une idée effrayante de la puissance, & des ressources des hommes qui les ont élevées. „ *Pensées sur l' Interpretation de la Nature*.

Questo per tutti i titoli rispettabile Autore dopo tutta questa eloquentissima amplificazione con miglior senno, e non maggior apparenza di verità conclude acconciamente così „ Et je dis heureux *le Géometre* en qui une étude consommée des sciences abstraites n' aura point affoibli le goût des beaux arts, à qui Horace & Tacite seront aussi familiers que

questi ultimi tempi di spargere dell' om-

 bre

que Newton, qui sçaura découvrir les propriétés d' une courbe & sentir les beautés d' un poëte; dont l' esprit & les ouvrages seront de tous les temps, & qui aura le mérite de toutes les académies! Il ne se verra point tomber dans l' obscurité; il n' aura point à craindre de survivre à sa renommée. „

(*b*) „ Il y a (dic' egli *Hist. Nat.* tom. 1. *Premier Discours*) plusieurs espéces de vérités, & on a coûtume de mettre dans le premier ordre les vérités mathématiques, ce ne sont cependant que des vérités de définition; ces définitions portent sur des suppositions simples, mais abstraites, & toutes les vérités en ce genre ne sont que des conséquences composées, mais toûjours abstraites, de ces définitions. Nous avons fait les suppositions, nous les avons combinées de toutes les façons, ce corps de combinaisons est la science mathématique; il n' y a donc rien dans cette science que ce que nous y avons mis, & les vérités qu' on en tire ne peuvent être que des expressions différentes sous les quelles se présentent les suppositions que nous avons employées; ainsi les vérités mathématiques ne sont que les répétitions exactes des définitions ou suppositions. La derniére conséquence n' est vraie que parce qu' elle est identique avec celle qui la précéde, &

que

bre sopra l'applicazione delle Matemati-
che

---

que celle-ci l'est avec la précédente, & ainsi de suite en remontant jusqu'à la première supposition ; & comme les définitions sont les seuls principes sur lesquels tout est établi, & qu'elles sont arbitraires & relatives, toutes les conséquences qu'on en peut tirer sont également arbitraires & relatives. Ce qu'on appelle vérités mathématiques se réduit donc à des identités d'idées & n'a aucune réalité : nous supposons, nous raisonnons sur nos suppositions, nous en tirons des conséquences, nous concluons, la conclusion ou dernière conséquence est une proposition vraie, relativement à notre supposition, mais cette vérité n'est pas plus réelle que la supposition elle-même. Ce n'est point ici le lieu de nous étendre sur les usages des sciences mathématiques, non plus que sur l'abus qu'on en peut faire, il nous suffit d'avoir prouvéque les vérités mathematiques ne sont que des vérités de définition, ou, si l'on veut, des expressions différentes de la même chose, & qu'elles ne sont vérités que relativement à ces mêmes définitions que nous avons faites ; c'est par cette raison qu'elles ont l'avantage d'être toûjours exactes & démonstratives, mais abstraites, intellectuelles & arbitraires.

Les vérités physiques, au contraire, ne sont nul-

che alla Fisica, altro non prova (se la
A 4 Ret-

---

nullement arbitraires & ne dépendent point de nous, au lieu d'être fondées sur des suppositions que nous ayons faites, elles ne sont appuyées que sur des faits; une suite de faits semblables, ou, si l'on veut une répétition fréquente & une succession non interrompue des mêmes événemens, fait l'essence de la vérité physique; ce qu'on appelle vèrité physique n'est donc qu'une probabilité, mais une probabilité si grande qu'elle équivaut à une certitude. En Mathématique on suppose, en Physique on pose & on établit; là ce sont des définitions, ici ce sont des faits; on va de définitions en définitions dans les Sciences abstraites, on marche d'observations en observations dans les Sciences réelles; dans les premiéres on arrive a l'evidence, dans les derniéres à la certitude..... Il y a bien peu de sujets en Physique où l'on puisse appliquer aussi avantageusement les sciences abstraites, & je ne vois guère que l'Astronomie & l'Optique auxquelles elles puissent être d'une grande utilité; l'Astronomie par les raisons que nous venons d'exposer, & l'Optique parce que la lumière étant un corps presqu'infiniment petit, dont les effets s'opèrent en ligne droite avec une vîtesse presque infinie, ses propriétés sont presque mathématiques, ce qui fait qu'on peut y appliquer avec quelque succès le calcul & les mesures géometriques. » Per

Rettorica prova qualche cosa) fuorchè ciò

Per altro questo insigne Filosofo, e Scrittore originale, a cui sono altresì familiari le Matematiche più sublimi, confessa con tutto il candore e verità, che „ la plus belle & la plus heureuse application qu'on en ait jamais faite, est au systéme du monde ; & il faut avouer que si Newton ne nous eût donné que les idées physiques de son systême, sans les avoir appuyées sur des évaluations précises & mathématiques, elles n'auroient pas eu à beaucoup prés la même force ; mais on doit sentir en même temps qu'il y a trés-peu de sujets aussi simples, c'est-à-dire, aussi dénués de qualités physiques que l'est celui-ci ; car la distance des planétes est si grande qu'on peut les considérer les unes à l'égard des autres comme n'étant que des points : on peut en même temps, sans se tromper, faire abstraction de toutes les qualités physiques des planètes, & ne considérer que leur force d'attraction : leurs mouvemens sont d'ailleurs les plus réguliers que nous connoissions, & n'éprouvent aucun retardement par la résistance : tout cela concourt à rendre l'explication du systême du monde un problème de mathématique, au quel il ne falloit qu'une idée physique heureusement concûe pour le réaliser; & cette idée est d'avoir pensé que la force qui fait tomber les graves à la surface de la

ciò che i Geometri stessi, ed i Fisici concordemente confessano, vale a dire che gli Uomini possono abusare, ed hanno talvolta abusato di una siffatta applicazione avendo voluto assoggettare arbitrariamente alla misura ed al calcolo ciò che o per indole propria, o per mancanza di sufficienti dati, o per l'esperienza ora mutola, ed ora contraria, era alla Geometria, ed all'Algebra intieramente straniero. L'abuso non è mai stato una prova contro l'utilità e il vantaggio della cosa abusata: e se Cartesio non è mai comparso sì grande agli occhi dei veri Sapienti come allorquando egli insegnò la maniera di applicare l'Algebra alla Geometria, invenzione importantissima e originale, che sarà sempre la chiave delle più profonde ricerche e delle più grandi scoperte; Newton, che partendo da questo termine fisso fece un viaggio tanto più grande e maraviglioso nelle Provincie della Filosofia, e insegnò l'arte di applicare l'Algebra e la Geometria alla Fisica, e di

---

la terre, pourroit bien être la même que celle qui retient la lune dans son orbite.„

di formare di queste tre Scienze una Scienza sola, sarà sempre l'ammirazione di tutti i Secoli. Ma questa grand' arte, che non ha regole fisse e costanti, giacchè non vi ponno esser regole per inventare, che tutta dipende dalla sagacità e penetrazione dell'Uomo, che dimanda ad ogni nuovo passo un nuovo artifizio, e richiede per ogni nuovo incidente un nuovo ripiego, che con un sottilissimo filo conduce il Fisico-Matematico per le vie tortuose ed oblique d'un laberinto immenso, dove è tanto facile di smarrire il sentiero, quest' arte profonda e difficile non può altramente esser messa in uso e ridotta alla pratica che con tutta quella scrupolosa cautela, la quale caratterizza la saggia timidità della Moderna Fisica. Un fatto primitivo e fondamentale, un effetto costante e immutabile, un principio conosciuto per induzione ed analogia e confermato coll' esperienza deè sempre servire come di punto d' appoggio all' artifizioso edifizio delle linee e dei calcoli, il quale altrimenti privo di base e di sostegno crollerebbe da tutte le parti, facendo tanto maggior torto al giudizio e alla

pro-

profondità dell' Autore, quanto più farebbe comparire il di lui ingegno e la di lui sottigliezza. La Geometria sempre subordinata alla Fisica, sempre ubbidiente all' esperienza e alla Natura deve aspettare che questa parli, avanti di profferire il suo oracolo; deve assoggettarsi ad ogni cenno di lei, custodirne gelosamente tutti i precetti, innoltrarsi dove quella le apre il sentiero, arrestarsi dove essa si ferma; in una parola dee ricever la legge, non darla. Ma se in luogo di ubbidire vuol comandare e dominar da se sola; se anche là portar vuole il compasso e la squadra dove non le è permesso vedere ciò che intende di misurare; se al suo ingegnoso edifizio dà per fondamento e per base in luogo dell' esperienza ed osservazione un principio astratto e ideale, un fatto supposto, un' ipotesi arbitraria; se in somma nel silenzio della Natura pretende di parlar essa sola, allora si può giustamente paragonare l' opera sublime del suo travaglio e delle sue speculazioni a quelle foreste del Nord, dove gli Alberi in gran parte si trovano senza radici: Basta un leggier soffio di vento

(secon-

(secondo l' espressione d' un ingegnoso Scrittore) *per atterrare una foresta d' Alberi, e d' idee* (c). In tutti questi casi discendendo la Geometria dal Mondo Intellettuale nel Mondo Fisico e reale, senza punto curarsi di studiarlo e conoscerlo, e quasi sdegnando di addomesticarsi e materializzarsi con esso, altro non fa che togliere al soggetto delle sue ricerche presso chè tutto il di lui esser reale, spogliarlo di tutte le fisiche qualità, trasformarlo in un essere astratto, non lasciandogli altra esistenza fuorchè l' ideale e precaria, e pretendendo dopo tutto questo di trasportare nel nostro mondo un risultato cotanto arbitrario, di dar corpo e solidità a un' astrazione, e di realizzare una verità puramente intellettuale, che non può esser tale se non se nel luogo di sua origine, ossia nel Mondo delle idee, e nel Regno vastissimo delle astrazioni. In siffatti inconvenienti allora s' incorre principalmente quando vuolsi a tutta forza applicare l'Analisi e la Geometria ad alcuni articoli tenebrosi e complicatissimi della Fisica

(c) *Interpr. de la Nat.* §. 8.

fica Particolare, dove o per la moltiplicità degli elementi che renderebbono il calcolo impraticabile, o per la loro incertezza ed oscurità, o per la non conosciuta energia delle forze e dei loro effetti, o per la legge ancora più ignota che regola la loro azione, convien gettarsi forzatamente nel mare delle ipotesi, sostituendo ai fatti reali che non si conoscono i principj ipotetici che si fingono, alterando in tal guisa e mascherando la Natura col lavoro e coll'opera dell'immaginazione. Chi mai sino ad ora ha potuto a cagion d'esempio assoggettare all'Analisi, e ridurre alla precisione geometrica la maggior parte de' maravigliosi fenomeni del Magnetismo, dell'Elettricità, delle Fermentazioni de' liquori, e pressochè tutti i portentosi effetti della Chimica? Qual Fisico, qual Geometra, saggio, modesto, circospetto, il qual conosca i confini della sua Arte, l'imperfezione de' suoi organi, i limiti delle sue cognizioni, la brevità dell'umano intelletto, e insieme l'ampiezza illimitata e la maestosa oscurità della Natura, può mai pretendere di numerarne tutte le parti, calcolarne tutte le

for-

forze, e misurare l'immensità? (*d*)

Ma ciò che sembra straordinario e quasi im-

(*d*) L'abuso più solenne, che siasi mai fatto delle Matematiche, è quello di aver voluto farne l'applicazione ai punti più ardui, inviluppati, e tenebrosi della Medicina; come se la grand'Arte di guarire, o piuttosto di promettere la guarigione potesse tutta ridursi in Teoremi di Geometria, o in Formole d'Algebra. Tutto si è voluto nell'Economia Animale sottomettere al Calcolo; tutto si è preteso di scandagliare col compasso e colla squadra dei Geometri. La manìa di calcolare è divenuta nella maggior parte de' Medici Geometri, o per meglio dire de' Geometri Medici, singolarmente Inglesi, una malattia epidemica. Calcolo Differenziale, Calcolo Integrale, Geometria Sublime, Analisi tutto si è fatto servire all'appoggio dell'errore, come della verità, e più spesso dell'uno che dell'altra; credendosi forse, che le linee dei Geometri, e le cifre degli Algebristi per qualche forza magica o per qualche secreta virtù avessero la prerogativa di trasformar l'errore in verità, e l'oscurità in evidenza. La stravaganza in questo genere è arrivata tant' oltre, che si è finanche intrapreso di fissare le dosi de' Medicamenti per mezzo delle ordinate di una Curva, i di cui diversi segmenti rappresen-

impossibile, e che dee farci conoscere la nostra picciolezza, e inspirarci una prudente modestia, e una giusta diffidenza delle no-

---

sentano la durata della Vita: ed affinchè nessuna specie di ridicolo rimanesse celata agli occhi del Pubblico, e tutte le stranezze possibili fossero autorizzate, il famoso Scozzese Pitcairn si propone a sangue freddo e con tutta la serietà nelle sue Opere il Problema (forse un pocolin più difficile, e senza dubbio infinitamente più utile di quello della Quadratura del Cerchio), DATA QUALUNQUE MALATTIA, RITROVARNE IL RIMEDIO; e recatane con tutta la buona fede una sua soluzione, contento e sodisfattissimo di se medesimo conclude colla formola sacra dei Geometri, QUOD ERAT DEMONSTRANDUM. E' uno Spettacolo singolare e un contrasto de' più bizzarri l' osservar da una parte la franchezza, colla quale i Medici calcolano, pesano, misurano tutti i moti, e tutte le forze più occulte del Corpo Umano; e dall' altra la ritenutezza e la modestia, colla quale i più grandi Geometri parlano della propria insufficienza e dell' impotenza della lor Arte a penetrar questi arcani. Il profondo e sublime Geometra Sig. D' Alembert nella Prefazione dell' eccellente Trattato del Moto, ed Equilibrio de' Fluidi protesta di esser molto lontano

nostre forze, si è, che anche nell'applicazione dell'Algebra alla pura Geometria, cioè nel mondo stesso intellettuale, dove tutte le verità ideali ed astratte dipendono

---

no dal credere, che la Teoria da esso stabilita intorno al moto de' fluidi nei Tubi flessibili, „ puisse nous conduire à la connoissance de la Méchanique du Corps humain, de la vîtesse du sang, de son action sur les vaisseaux dans lesquels il circule &c. Il faudroit pour réussir dans une telle recherche, savoir exactement jusqu'à quel point les vaisseaux peuvent se dilater, connoître parfaitement leur figure, leur élasticité plus ou moins grande, leurs différentes anastomoses, le nombre, la force & la disposition de leurs valvules, le degré de chaleur & de tenacité du sang, les forces motrices qui le poussent &c. Encore quand chacune de ces choses feroit parfaitement connue, la grande multitude d'élémens qui entreroient dans une pareille Théorie, nous conduiroit vraisemblablement à des calculs impraticables. C'est en effet ici un des cas les plus composés d'un Problême, dont le cas le plus simple est fort difficile à résoudre. Lorsque les effets de la nature sont trop compliqués, & trop peu connus pour pouvoir être soumis à nos calculs, l'Expérience, comme nous l'avons déja dit, est le seul guide qui

no unicamente dal nostro intelletto, sono figlie de' nostri concetti, e quasi creature di nostra mente, s'incontrano talvolta degli ostacoli insuperabili, e de' paradossi inaspettati.

---

qui nous reste : nous ne pouvons nous appuyer que sur des inductions déduites d'un grand nombre de faits. Voilà le plan que nous devons suivre dans l'examen d'une Machine aussi composée que le Corps humain. Il n'appartient qu'à des Physiciens oisifs de s'imaginer qu'à force d'Algébre & d'hypothèses, ils viendront à bout d'en dévoiler les ressorts, & de réduire en calcul l'art de guérir les hommes ,,.

Un altro illustre Filosofo, cioè il Maupertuis nella sua Lettera sopra la Medicina riprovando anch'egli il coraggio di que' Jatro-Matematici, che vogliono applicare senza limitazione alcuna ad onta della natura, e della ragione le leggi dell' Idrodinamica al movimento de' Fluidi del Corpo Umano, racconta la leggiadra novella di quel Medico, il quale avendo calcolato matematicamente tutti gli effetti delle diverse sorti di Salasso, esaminati que' calcoli da un gran Geometra, e trovatili tutti insussistenti e paralogistici, diede il libro alle fiamme, e non lasciò per questo di far sempre salassare i suoi ammalati secondo la sua Teoria. " C'est peut-être (dice questo gentile

ti. Chi non sa per cagion d'esempio, che nelle curve rappresentate dall'equazione

$y = x^{r^2}$, chiamate dal gran Leibnitz *Interscendenti*, rimane tuttora indeciso con mol-

ta

---

tile e giudizioso Scrittore) un paradoxe de dire que le progrès qu'ont fait les Sciences dans ces derniers siècles, à été préjudiciable à quelques unes ; mais la chose n'en est pas moins vraye. Frappé des avantages des Sciences Mathématiques, on a voulu les porter jusques dans celles qui n'en étoient pas susceptibles, ou qui n'en étoient pas encore susceptibles.

On avoit appliqué fort heureusement les calculs de la Géométrie aux plus grands Phénoménes de la nature : lorsqu'on à voulu descendre à une Physique plus particuliére, on n'à pas eû le même succès : mais dans la Médecine, on à encore moins réussi.

J'ai connu un Médecin fameux qui avoit calculé mathématiquement tous les effets des différentes sortes de saignées : Les nouvelles distributions du sang qui doivent se faire, & les différens dégrés de vîtesse qu'il acquiert ou perd dans chaque artère & dans chaque veine : Son Livre alloit être donné à l'Imprimeur, lorsque sur quelque petit scrupule, l'Au-

tà confusione dei Geometri, se i valori delle ordinate persistano ad esser reali, oppure diventino immaginarj qualora poste le ascisse negative l'equazione si cangia in $y = (-x)^{\sqrt{2}}$, niente contribuendo al dicifiramento di questo enigma i valori approssiman-

l'Auteur me pria de l'éxaminer : Je sentis bientôt mon insuffisance ; & remis la chose à un grand Géomètre qui venoit de publier un Ouvrage excellent sur le mouvement des Fluides. Il lut le Livre sur la saignée ; il y trouva résolus une infinité de Problèmes insolubles, dont l'Auteur n'avoit pas soupçonné la difficulté ; & démontra qu'il n'y avoit pas une proposition qui pût subsister. Le Médecin jetta son Livre au feu, & n'en continua pas moins de faire saigner ses malades suivant sa théorie.,,

Ma chi volesse per tutto questo escludere interamente dalla Razional Medicina e dalla Fisiologia il saggio e moderato uso delle Matematiche, di cui molti hanno abusato, sarebbe da paragonarsi a quel moderno Orator malinconico, il qual vorrebbe condurci tutti a pascolare perchè s'incontrano degli Uomini malvagj nella società. Qual è mai quella cosa, di cui gli Uomini non abbiano abusato? Si abu-

ſimanti di $\sqrt{2}$, come è pur manifeſto? A chi non è noto l'arcano de' *Punti Diſcreti*, nelle curve Tranſcendenti Eſponenziali dell'equazione $y = x^x$, i punti delle quali ceſſando di eſſer contigui dalla parte delle aſciſ-

abuſa tutto giorno della ragione: ma chi voleſſe per queſto proſcriverne l'uſo, meriterebbe più il titolo di animal ragionevole? Baſta dare un' occhiata alle Opere dei Borelli, Bellini, Pitcairn, Keil, Cheyne, Michelotti, Jurin, Boerhaave, Hales, Porterfield, Stuard, Witringam, Robinſon, Hamberger, e ſopra tutto a quelle dell' immortale Sauvages per conoſcere, anche a fronte di qualche abuſo, quai ſuſſidj e vantaggj abbia riportato, e a qual grado di ſublimità, e di eccellenza ſia ſtata condotta la Teorica Medicina mediante l'applicazione della Meccanica, e l'uſo opportuno delle dottrine Matematiche. Queſta verità riconoſciuta da chiunque ha fior di ſenno, autorizzata dal ſuffragio de' più illuminati, e confermata dai progreſſi viſibili dell'Arte, è nota oggimai anche alle Donne, e la grand' Opera Medico-Matematica dell' Emaſtatica di Hales tradotta e poſtillata dalla celebre Signora Mariangela Ardinghelli ne è una pruova illuſtre e recente.

La

ascisse negative, cioè allorchè l'equazione diviene $y = \frac{1}{(-x)^n}$, vengono quindi a formare una traccia non continua di Punti *Discreti* o disgiunti, i quali però a cagione degl' intervalli infinitamente piccioli fra

La grand' obbiezione che fanno gli Anti-Matematici contro qualunque uso della Geometria nella ricerca del meccanismo del Corpo Umano, è fondata sulla discordia de' più insigni Jatro-Matematici intorno ad un punto primario e capitale della Fisiologia, cioè intorno alla misura della Forza del Cuore. Mirate (dicono questi innocenti nemici della Geometria) i Meccanici armati contro i Meccanici, i Geometri contro i Geometri. Osservate la bella concordia di questi calcolatori della Forza del Cuore, i quali pur gridano tutti, e ripetono in ogni pagina *verità*, *evidenza*, *dimostrazione*. Vedete (per nominarne due soli de' più segnalati) da una parte il Borelli misurar questa forza, e ritrovarla di cent' ottanta mila libbre; rimirate dall' altra il Keil calcolar la medesima del peso di ott' oncie. Che più si desidera, se i Geometri stessi mettono in mostra in sì scandalosa maniera le loro vergogne?

Quest' obbiezione che ha un mezzo secolo di

fra l'uno e l'altro mentiscono una perfetta continuità? Chi non conosce il paradosso del valore infinito, che risulta dal dividere

---

di età, che si legge in tutti i libercoli, che corre per tutte le bocche, non merita una seria confutazione. Non può un Medico, e nè tampoco un Filosofò ignorare senza suo disonore, che tre differenti specie di forze possono ne' muscoli considerarsi; 1.° la forza di tenacità; 2.° la forza contrattiva *intera* e *reale*; 3.° la forza contrattiva *apparente* e *parziale*. Si misura la prima dal massimo peso, che può il muscolo senza rompersi sostenere; la seconda dalla somma totale delle azioni e degli sforzi impiegati dalla potenza motrice per contrarre il muscolo; la terza dal peso apparente e sensibile, che il muscolo sostiene nella contrazione senza por mente agli sforzi che si distruggono, o agli organi comodi o incomodi per sostenerlo. Chi non vede ora, che secondo i differenti oggetti, che si prenderanno di mira nel calcolare la forza del Cuore, differenti altresì dovrann' essere i risultati? Qual meraviglia, che i Calcoli di Borelli, di Keil, di Jurin, di Morland, di Tabor, di Hales, di Morgan, di Robinson, di Sauvages, di Bernoulli non si accordino punto tra loro, se uno cerca la forza totale del cuore, un altro una parte di questa forza, un terzo

re l'angolo della tangente immaginaria $\sqrt{-1}$ per l'istessa tangente; essendo, come ognun sa, Ang. tang. $x\sqrt{-1}$

$$=\int\frac{dx\sqrt{-1}}{1-x^2}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{1+x}{1-x}$$; e però

posto $x=1$, Ang. tang. $\sqrt{-1}=\infty\sqrt{-1}$,

ed $\frac{\text{Ang. tang.}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\infty$? Ma non solamente la Dottrina delle Curve Trascen-

 den-

terzo quella del sangue all' entrar nell' aorta, e così discorrendo? La meraviglia sarebbe e lo scandalo della Geometria, che questi calcoli si trovasser concordi, e fossero tutti uniformi: O anzi per parlare con maggior esattezza, la loro diversità consiste unicamente ne' termini, non già nella cosa; a quel modo appunto che può dirsi con verità, e senz' ombra di contraddizione, che la forza del muscolo deltoide uguaglia un peso di cento mila libbre, e un peso di dieci libbre, calcolando nel primo caso la forza intera e reale; nel secondo la forza sensibile, che si riduce a sostenere dall' estre-

denti offre cotesti enigmi al Geometra, che ne rintraccia per mezzo dell' Algebra le proprietà: anche nella Teoria delle Curve Geometriche scopresi talvolta inaspettatamente il Calcolo in difetto, e trovasi im-

tremità della mano a braccio disteso il solo peso di dieci libbre; siccome ha dimostrato l' illustre Sauvages dopo il Borelli colla correzione di Parent, intorno a' punti d' appoggio delle ossa, ed al calcolo degli sfregamenti. Se io per cagion d' esempio giusta il sensatissimo riflesso di Sauvages nelle sue eccellenti annotazioni all' opera citata di Hales, voglio sapere qual peso può sostenere lo stantuffo d' una scilinga tirata secondo il suo asse; ne faccio l' esperimento, e trovo, se vogliamo, che un tal peso arriva a dieci mila libbre. Se dopo voglio sapere qual peso può sostener lo stantuffo situato orizzontalmente, e tirato per una direzione perpendicolare al suo asse; fo il calcolo, e lo ritrovo di cento libbre. Se finalmente voglio conoscere e il peso equivalente alla forza, colla quale lo stantuffo spinge l' acqua per la cannella della scilinga, e il peso che può sostenere quest' acqua nell' uscire dalla cannella; supposta la base dello stantuffo dieci volte maggiore della sezione della cannella, fatta la pruova ritrovo il primo peso per esempio

improvvisamente arrenato il Calcolatore. Basti per tutti l'esempio delle Iperbole superiori, la di cui equazione agli asintoti, pren-

---

pio di dieci libbre, il secondo di una libbra. Tutti questi calcoli sono giusti, e niuno dirà mai, che siano tra loro discordanti e contraddittorj. Come dunque potrà dirsi, che i calcoli fatti dai Medici Meccanici per misurar la forza del cuore si combattono e contraddicono? Possono, egli è vero, esser fondati sopra dati anatomici poco giusti, possono per mancanza di esatte misure, mancar di rigore e di esattezza; ma per renderli più esatti, o più prossimi alla verità, non altro abbisogna che prendere più giuste e accurate le misure del cuore, e dei vasi: La Geometria stessa correggerà gli errori dei Geometri, e dagli errori medesimi che verranno da lei emendati si farà strada verso la verità. La discordanza adunque di queste computazioni, che scandalizza gl' innocenti e i pusilli, è un nuovo argomento per li Geometri, onde far maggiormente conoscere la debolezza de' loro Avversarj, ridotti a far uso d' un' arme sì fragile, e sì spuntata. Quindi è, che l' insigne Senac, la di cui autorità non può essere in alcun conto sospetta, nella bella Prefazione del suo grande ed eccellente Trattato del Cuore dopo avere con tutta l' energia esposti gl' inconvenienti dell' abuso delle Mate-

prendendo l'origine delle ascisse alla distanza a dal concorso di essi, è $(a-x)^m y^n = 1$; e l'espressione dell'area iperbolica è

$$\int y dx = \frac{n}{(m-n)\ (a-x)^{\frac{m-n}{n}}} - \frac{n}{(m-n) a^{\frac{m-n}{n}}}:$$

La qual espressione, posto $x > a$, $n = 1$, ed

Matematiche nella Medicina conclude divinamente così: DE TELLES RAISONS N' EXCUSENT PAS L' IGNORANCE DE CEUX QUI SANS LE SECOURS DE LA GÉOMÉTRIE CROYENT POUVOIR PÉNÉTRER DANS LE MÉCHANISME DU CORPS HUMAIN. TOUS LEURS PAS SERONT MARQUÉS PAR DES ERREURS GROSSIÉRES; ILS NE SCAUROIENT APPRÉCIER LES OBJETS LES PLUS SIMPLES; TOUT CE QUI AURA QUELQUE RAPPORT AVEC LA SOLIDITÉ, LES SURFACÉS, L'ÉQUILIBRE, LES FORCES

ed *m* qualunque numero pari, trovasi finita e negativa; laddove al contrario nelle mede-

---

CES MOUVANTES, LE COURS DES LIQUEURS, SERA UN ÉCUEIL POUR EUX. SI LA GÉOMÉTRIE NE NOUS OUVRE PAS LES SECRETS DE LA NATURE DANS LES CORPS ANIMÉS ELLE EST UN PRÉSERVATIF NÉCESSAERE, C'EST UN FLAMBEAU QUI EN ÉCLAIRANT NOS PAS, NOUS EMPÊCHE DE FAIRE DES CHÛTES HONTEUSES QUI EN ATTIREROIENT D'AUTRES. LES ERREURS SONT PLUS FECONDES QUE LA VÉRITÉ; ELLES ENTRAINENT TOUJOURS AVEC ELLES UNE LONGUE SUITE D'ÉGAREMENS.

Noi chiuderemo questa nota col grazioso apologo del tante volte lodato Boissier de Sauvages.

(Hales *Hæmastatique Introd.*, *Remarque de* Mr. Sauvages).

Un

medesime condizioni l'area iperbolica diventa indubitatamente, come altronde è noto, infinita e positiva.

La

Un homme ayant un œuil poché,
Et voyant assez peu de son autre visiére,
S'écrioit un jour, fort fâché
De n'avoir pas sa vuë entiere: (voir;
Quoi! n'y voir qu'à demi! j'aime meux n'y point
On me rit au nés quand je lorgne,
Qui pis est on m'appelle borgne.
Il faut avoir deux yeux ou bien n'en point avoir:
Vous en serez la dupe, ô Nature marâtre,
Car je vai sur l'œuil sain m'appliquer un emplâtre.
Nôtre homme & ses belles raisons
Sentoient les petites-maisons.
Cependant nous voyons des Médecins fort graves
Qui raisonnent tout comme lui:
De la Géométrie on veut nous rendre esclaves;
Par tout on la vante aujourdui;
Sa méthode, dit-on, qu'à nôtre Art on applique,
Fait raisonner plus juste & voir même plus clair;
Sans elle, il est vrai, la Physique
Ne fait que des contes en l'air. (ses?
Mais que nous apprend-elle en l'essence des cho-
Presque rien: ce ne sont que de certains rapports;
On sait quelques effets, mais en sait-on les causes?
Et sans sortir de nôtre corps,
En voit-on le tissu, les fibres, les ressorts?
Quelqu'un en a-t-il pris les exactes mesures?

Les

La Meccanica poi Razionaie, tutto chè dessa pure appartenga (*e*) alla classe delle Matematiche Astratte, non altro essendo secondo la definizione di Newton che la Scien-

---

Les régles, il est vrai, sont sûres,
Mais pour les appliquer on fait de vains efforts.
C' est fort bien raisonné sans doute:
Puisqu' en l' Art d'HIPPOCRATE on ne voit (presque goute;
Il faut fermer les yeux & marcher â tâtons;
Etant tous quinze-vingts, pour mieux trouver la (route
Il ne resteroit plus qu'à jetter nos bâtons.

(*e*) Newton *Princ. Præf.*, D'Alembert *Dynam. Disc. Prél.*, Buffon. *Hist. Nat. Préf.*

E' degnissimo di tutte la considerazione ciò che avverte nel luogo citato l' incomparabile Geometra e Filosofo Sig. *D'* Alembert: „ La certitude des Mathématiques est un avantage que ces Sciences doivent principalement à la simplicité de leur objet. Il faut avouer même, que comme toutes les parties des Mathématiques n' ont pas un objet également simple, aussi la certitude proprement dite, celle qui est fondée sur des principes nécessairement vrais & évidens par eux-mêmes, n' appartient ni également, ni de la même maniere à toutes ces parties. Plusieurs d'entr'elles, appuyées sur des principes

Scienza rigorosa e dimostrativa dei Movimenti, e delle Forze Motrici, presenta assai più spesso all'Analista Geometra cotesti inciampi, e ricusa talvolta di sottomettersi senza le opportune restrizioni al giogo dell'Analisi, e al freno del Calcolo. E' insigne nella Dottrina delle Forze Centrali il caso di quel Corpo, che lanciato con una data velocità e sollecitato da una forza centripeta reciprocamente proporzionale al cubo

---

cipes Physiques, c'est-à-dire sur des vérités d'expérience, ou sur de simples hypotheses, n'ont, pour ainsi dire, qu'une certitude d'experience, ou même de pure supposition. Il n'y a, pour parler exactement, que celles qui traitent du calcul des grandeurs, & des propriétes générales de l'étendue, c'est-dire l'Algébre, la Géométrie & la Méchanique, qu'on puisse regarder comme marquées au sceau de l'évidence. Encore y a-t-il dans la lumiere que ces Sciences présentent à notre esprit, une espece de gradation, &, pour ainsi dire, de nuance à observer. Plus l'objet qu'elles embrassent est étendu, & considéré d'une maniere générale & abstraite, plus aussi leurs principes sont exempts de nuages & faciles à saisir. C'est par cette raison que la Géométrie est plus simple que la Méchanique, & l'une & l'autre moins simples que l'Algébre. Ce paradoxe ne pa-

bo delle distanze dal centro si muove nella Spirale Logaritmica. La formola analitica, che rappresenta il luogo, dove dee ritrovarsi il detto corpo nel termine d'un certo tempo, scopresi viziata da un valore impossibile e immaginario: Dal qual valore immaginario il più grande dei Geometri ne ricavò poi quella conclusione un poco anti-fisica, che il corpo giunto appena nel cen-

---

paroîtra point tel à ceux qui ont étudié ces Sciences en Philosophes: les notions les plus abstraites, celles que le commun des hommes regarde comme les plus inaccessibles, sont souvent celles qui portent avec elles une plus grande lumiere: l'obscurité semble s'emparer de nos idées à mesure que nous examinons dans un objet plus de propriétés sensibles; l'impénétrabilité, ajoûtée à l'idée de l'étendue, semble ne nous offrir qu'un mystere de plus; la nature du mouvement est une énigme pour les Philosophes; le principe Métaphysique des loix de la percussion ne leur est pas moins caché; en un mot plus ils approfondissent l'idée qu'ils se forment de la matiere, & des propriétés qui la représentent, plus cette idée s'obscurcit & paroît vouloir leur échapper; plus ils se persuadent que l'existence des objets extérieurs, appuyée sur le témoignage équivoque de nos sens, est ce que nous connoissons le moins imparfaitement en eux. „

centro doveva ſparire e annientarſi (*f*). Solenne è pure e ſingolariſſimo il caſo di un Corpo tirato in linea retta verſo un centro da una forza, la di cui intenſità creſca in ragione d'una potenza n delle diſtanze dal centro. Chiamando in queſta ipoteſi a la prima diſtanza del corpo dal centro, x lo ſpazio da eſſo traſcorſo per l'azione di detta forza, u la velocità acquiſtata nel deſcrivere tale ſpazio; riſulta, come è noto per li principj Meccanici, l'equazione differenziale $(a-x)^n \, dx = udu$; la quale integrata

cangiaſi in $$\frac{2a^{n+1} - 2(a-x)^{n+1}}{n+1} = u^2 .$$

Da queſta equazione immantinente ſi ſcorge, che qualora ſia $n+1$ un numero negativo la velocità acquiſtata dal corpo nel giugnere al centro, cioè allo ſvanire di x, diviene infinita. E ſiccome di là dal centro, ovvero diventando $x > a$ la predetta formola in alcuni caſi, come per eſempio quando $n+1$ è un numero negativo diſ-

pari,

(*f*) Mech. tom. I. §. 676. 762.

pari, rappresenta contra ogni evidenza, immaginario e impossibile il valore della velocità; quindi il sullodato sommo Geometra, per troppa fiducia e venerazione ad una formola d' Algebra, ha creduto poter inferire, che non ostante quell' infinita velocità il corpo giunto al centro qualche volta incontanente si fermerà, qualche volta tornerà indietro, e qualche volta per uscir d' ogn' impegno sparirà; e volendo pure ad ogni patto cattivar la ragione sotto la fede di una formula ambigua è arrivato a pronunziare quella sentenza, forse un poco anti-logica, che *sebbene ciò sembra contrario alla verità, nulladimeno in tal caso è più da fidarsi del calcolo che del nostro stesso giudizio* (g). E' memorabile finalmente il

C Pro-

(g) *Mech. tom.* I. §. 272. Questi piccioli nei, che s' incontrano nell' eccellente Meccanica d' un sì profondo Calcolatore, (al quale con tutta giustizia e verità può applicarsi il greco proverbio εἷς μυρίοι) rilevati con acerbità da Beniamino Robins nel Libro intitolato *Remarks on Mr. Euler treatise of motion by BENJAMIN ROBINS*, non fanno alcun torto all' immenso sapere e all' inarrivabile penetrazione di quel grandissimo

Geo-

Problema, in cui data una forza repellente in ragione d'una potenza n delle distanze dal centro cercasi nel corpo respinto e cacciato dal centro in virtù di questa forza la velocità, e il tempo a qualsivoglia distanza. E' noto, che chiamando y la distanza del corpo dal centro, ed a quella distanza dove la forza repellente sia espressa da 1,

per l'analogia $a^n : y^n :: 1 : \frac{y^n}{a^n}$ la quan-

tità

Geometra, le di cui Opere tanto varie originali e sublimi faranno fede alla più rimota Posterità, che nel Secolo decimottavo l' ingegno umano a forza d' Algebra, e di Geometria è salito a tanta altezza, a cui niuno avrebbe creduto che potesse mai pervenire. Quando cotesto Sig. Robins, che insulta l' illustre Giovanni Bernoulli, che tratta da ignoranti i celebri Smith, e Jurin, che discende persino alla bassezza (*A Discourse concerning Nat. and certainty of Fluxions*) di tradurre il gran Newton per Uomo imbrogliato e confuso, ci darà qualche cosa che vaglia la Meccanica del Sig. Euler, allora noi gli perdoneremo la sua animosità, le sue critiche, e i suoi errori.

tità $\frac{y^n}{a^n}$ rappresenterà la forza repellente alla distanza y; d' onde per le conosciute teorie (nominando v la velocità) si ricava $v dv = \frac{y^n dy}{a^n}$, ed integrando $v = \sqrt{\frac{2y^{n+1}}{(n+1)a^n} + A}$; e chiamando t il tempo si ritrae $dt = \frac{dy}{v} = dy \sqrt{\frac{(n+1)a^n}{2y^{n+1}}}$, e quindi $t = \frac{1}{1-n} \sqrt{(2+2n)a^n y^{1-n}} + B$.

Ora il nodo, che qui incontra il Sig. Euler (come può vedersi nella sua Meccanica *tom.* I. §. 314. 315. 316. ec.) nel caso che n sia minore dell'unità è un nonnulla a fronte dello scoglio, incontro al quale si va ad urtare nell' ipotesi che $n+1$ sia un numero negativo. In questa ipotesi i valori di v, e t, com-

 pren-

prendendo fotto il fegno radicale quadratico una quantità negativa, diventano immaginarj; il che è certamente un enigma ftraniffimo, anzi un affurdo palpabile, effendo una manifefta contraddizione, che fuppofto *n* un numero negativo maggiore dell'unità, ovvero nell'ipotefi che la forza repellente crefca nella ragione inverfa d'una qualche potenza (maggiore dell'unità) delle diftanze dal centro, la velocità, ed il tempo per qualfivoglia fpazio trafcorfo debbano ritrovarfi impoffibili e immaginarj.

Siffatti nodi ed inciampi, che l'ufo del Calcolo nelle Matematiche Pure oppone non di rado all'Analifta Geometra s'incontrano più frequenti, e più imbarazzanti nelle Matematiche Mifte. Sono quivi affai comuni gl'inconvenienti, che s'affacciano al Geometra, che vuol efprimere fimbolicamente colle analitiche formole certe date Queftioni di Fifica, che per alcune particolari condizioni e accidenti non ponno effere nella loro totalità dalle quantità algebraiche rapprefentate ed efpreffe. Non potendofi allora tradurre quefte condizioni e circoftanze dal linguaggio ordinario,

nario, in cui sono espresse, nel linguaggio simbolico o algebraico, scopresi il Fisico-Matematico ridotto a quel medesimo passo, in cui trovasi un Traduttore, il quale per trasportare dal greco in un altro idioma una qualche frase o maniera di dire propria e individuale di quella lingua scuopre mancanti nell'altro idioma i termini acconcj e l'espressioni corrispondenti.

E' osservazione già fatta dal Sig. D'Alembert nel tomo V. de' suoi Miscellanei, e nell'articolo *Equation* dell'Enciclopedia, che ne' Problemi Algebraici le radici negative dell'equazione contenendo la soluzione di altrettanti Problemi analogi, ma però differenti dal primo, ad altro non servono che ad inviluppare, e per così dire a mascherare la prima soluzione, la quale trovandosi incorporata, e come amalgamata colle altre è tanto più difficile a discoprirsi e distinguersi. Questa moltiplicità di soluzioni, le quali sebbene analoghe alla prima sono però differenti dalla soluzione vera, e diretta della Questione, potrebbe riguardarsi come una ricchezza dell'Algebra, se oltre all'indicato inconvenien-

veniente non ne risultasse un altro anco maggiore, che è di far montare l'equazione, ossia la traduzione del Problema, ad un grado molto più alto di quello, a cui salirebbe, se ella contenesse unicamente le radici proprie alla vera e precisa soluzione del Problema nel senso rigoroso, in cui è stato proposto. *Egli è vero*, dice il Sig. D'Alembert, *che questo inconveniente sarebbe molto minore, e sarebbe anche in un senso una vera ricchezza, se si avesse un metodo generale per risolvere le equazioni di tutti i gradi: basterebbe allora separare e discernere da tutte le radici quelle che veramente abbisognassero. Ma per mala ventura giunti appena al terzo grado ci troviamo arrenati. Sarebbe dunque da desiderarsi, giacchè tutte le equazioni non sono risolubili, che si potessero almeno abbassare al grado della Questione, vale a dire a contenere tante unità nè più nè meno nell'esponente del loro grado, quante sono le soluzioni immediate e dirette dell'istessa Questione: Ma la natura dell'Algebra non sembra permetterlo.*

Che se ne' Problemi stessi Algebraici (nel mentre che il calcolo per una certa superfluità, che alcuni confondono colla ricchezza, ci dà quello che il Problema

blema non dimandava), ci troviamo per questo appunto più imbarazzati a trascegliere ciò che il Problema realmente dimanda e a ritrovarne la vera e immediata soluzione; molto maggiore di questa è l'imperfezione dell' Analisi ne' Problemi Fisico-Matematici, dove non sempre possono aversi le necessarie formole generali, le quali si adattino a tutte le circostanze della Questione, e ne esprimano tutti gli stati differenti e tutte le diverse modificazioni. Addiviene allora, che volendosi senza restrizione alcuna applicare le formole algebraiche a quei casi ed accidenti, che elle non possono rappresentare ed esprimere, s'inciampa sconciamente nella conclusione, la quale presenta sotto un aspetto assurdo e contraddittorio que' risultati, che secondo la natura del Problema, il senso retto, e la ragione esser debbono onninamente reali.

Per andare al riparo d'un tal disordine, basta il più delle volte introdurre nella formola analitica rappresentatrice della proposta Questione un picciolo cambiamento, il quale esprima quella circostanza o modificazione del Problema, che nella

formola primitiva non veniva compresa. La sagacità e destrezza del Geometra supplisce allora all'imperfezione del calcolo, e al difetto di generalità nell'espressione algebraica. Così (nel Problema di un corpo, che viene sollecitato da una forza attraente centrale in ragione d'una potenza n delle distanze dal centro, ed incomincia il suo moto dalla distanza a dal centro medesimo, e scorrendo lo spazio x acquista la velocità v) la formula $(a-x)^n\, dx = vdv$ non ha tutta la necessaria estensione per comprendere tutti i differenti stati del Problema, e per esprimerne le varie gradazioni. Imperciocchè è evidente per la natura del Problema, che giunto il corpo di là dal centro delle forze, cioè trascorso lo spazio $x > a$, i momentanei incrementi delle velocità riuscir debbono negativi, ovvero cangiarsi in decrementi; e questo è quello che la formola non arriva ad esprimere nell'ipotesi di n numero pari: che anzi supposto n una frazione di denominatore pari, ridotta ai minimi termini, diventa di là dal centro immaginaria la formola contro ogni evidenza, e contra la natura stessa della Questione. Il Sig. Cavaliere de Foncenex in una dotta Dissertazione sopra

le

le *Quantità Immaginarie* inserita nel I.° tomo de' Miscellanei dell' Accademia di Torino per riparare gli anzidetti inconvenienti, indicati poscia eziandio dal Sig. D'Alembert nel I.° tomo de' suoi *Opuscoli Matematici p.* 219., e nel IV.° *p.* 62., e per dare alla formola precedente la maggiore possibile generalità, e farla esprimere tutti i casi, e tutte le circostanze possibili del Problema, propone l' ingegnoso ripiego di moltiplicare il primo membro di detta formola per la quantità indeterminata b, di cui convien poscia determinare il valore secondo le varie circostanze, e le differenti modificazioni del Problema, e secondo l' esigenza de' casi, che dall' indole della Questione derivano; di maniera che l' indeterminata b potrà essere anco talvolta una quantità immaginaria $A + B\sqrt{-1}$ (*b*) è ciò per togliere la forma

(*b*) Il bel Problema di ridurre qualsivoglia immaginaria quantità, e comunque complicata e composta, alla forma semplicissima $A + B\sqrt{-1}$, dove A, e B denotano qualunque quantità reale, è stato prima dimostrato

ma immaginaria a quelle espressioni, che la Logica, la Fisica, e la Natura mostrano dover esser reali. E sebbene non è mancato (*i*) chi ha voluto ridere d' un così giusto e giudizioso ripiego dell' illustre Sig. de Foncenex; è però certo e indubitato, che questo è l'unico mezzo di evitare quegli assurdi, e di sfuggire que' stravagantissimi paradossi, che

---

strato dal Sig. D Alembert nel tom. II. delle Memorie dell' Acc. di Berlino, poi dal Sig. Euler nel tom. V. delle stesse Memorie, dal Sig. Bougainville nell' Introduzione al suo Calcolo Integrale, e finalmente dal Sig. Foncenex nella sullodata Dissertazione.

(*i*) Un Valentuomo in un libro intitolato *Commentarii Duodecim De Rebus Ad Scientiam Naturalem Pertinentibus*, *Praef. p. XIV.*, parlando a questo proposito dice: *quod est festivius &c.* Questo Valentuomo, di cui rispettiamo i talenti, ci permetterà di essere intorno a ciò d' un altro sentimento, per non trovarci obbligati [volendo esser coerenti] a difendere de' paradossi, che è assolutamente impossibile di conciliare coi canoni della Logica, e colle regole del retto discorso.

Non eadem sentire duos de rebus eisdem
Incolumi licuit semper amicitia.

che difesi con calore e sostenuti con perseveranza, nel concetto di molti, disonorano i Geometri e la Geometria.

Con simile accorgimento, e con frutto di gran lunga maggiore si è in questi ultimi tempi introdotta nella Geometria la Teoria sublime e profonda delle *Funzioni Discontinue*, intorno alla quale si sono segnalati i più illustri Geometri di questo Secolo. Arricchita l'Analisi d'una parte tanto importante, di cui prima era mancante, si è potuto con ammirazione degl' Intendenti, e con vantaggio della Fisico-Matematica farne poscia l'applicazione più fortunata ad alcune Questioni di Fisica, sommamente ardue ed astruse, e che erano state per lo innanzi lo scoglio de' Geometri, e il tormento degl'ingegni più nobili ed elevati. Niuno havvi fra i Matematici, a cui possa essere ignoto il famoso Problema delle *Corde Vibranti*, e l'uso grandissimo e indispensabile della Dottrina delle *Funzioni Discontinue* nella soluzione di questo Problema, che è oggimai divenuto l'aringo di emulazione e di gloria fra i quattro sommi Geometri,

viven-

viventi in Europa, e farà pe' noſtri Poſteri il più ſicuro argomento, e l'eſempio più ſegnalato de' progreſſi dell' Ingegno Umano nel Secolo Decimottavo.

DEL-

DELLE ALTEZZE BAROMETRICHE, E DI ALCUNI INSIGNI PARADOSSI RELATIVI ALLE MEDESIME.

Saggio Analitico.

PROBL.

Ata l' altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, cercasi l' altezza del medesimo per qualunque luogo sopra il livello marittimo, supposta la gravità variabile in ragione inversa d' una potenza *n* delle distanze dal centro terrestre.

SOL.

SOL.

Chiamo A l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, x l'elevazione perpendicolare del luogo sopra lo ſteſſo livello, z l'altezza del mercurio in queſto luogo, f la denſità dell'aria vicino al mare, q la denſità della medeſima alla ſommità di x, g la gravità acceleratrice ſulla ſuperficie terreſtre, ed r finalmente il ſemidiametro della terra.

Sarà dunque $gA =$ alla preſſione di tutta la colonna d'aria dalla ſuperficie del mare fino al termine dell'atmosfera: e facendo come $(r+x)^n$ ad r^n, così g al quarto $\frac{gr^n}{(r+x)^n}$, che eſprimerà la gravità acceleratrice alla ſōmità di x, moltiplicando queſto per z ſi otterrà $\frac{gr^n z}{(r+x)^n}$ $=$ alla preſſione dell'aria ſuperiore all'elevazio-

vazione x : onde avrassi $gA - \frac{gr^n z}{(r+x)^n} =$ alla pressione della colonna d'aria dell' altezza x. Ora se di questa colonna si piglia l' elemento dx, e si moltiplica per la densità q, e per la gravità acceleratrice $\frac{gr^n}{(r+x)^n}$, il prodotto $\frac{gr^n q\,dx}{(r+x)^n}$ rappresenta la pressione elementare di detta colonna. Quindi è agevole l' inferire $\int \frac{gr^n q\,dx}{(r+x)^n} = gA - \frac{gr^n z}{(r+x)^n}$; e differenziando, $q dx = -dz + \frac{nz dx}{r+x}$. Suppoſte ora le denſità dell' aria proporzionali ai peſi ſuperiori prementi, e ad un peſo ſempre uguale e coſtante C, ſi avrà

(l) l'analogia $gA + C : \frac{gr^n z}{(r+x)^n} + C :: f : q$;

e però $q = \frac{fC + \frac{fgr^n z}{(r+x)^n}}{gA + C}$. Dunque dz

$$- \frac{nzdx}{r+x} + \frac{fgr^n z dx}{(gA+C)(r+x)^n} = - \frac{fCdx}{gA+C};$$

Per ridurre ad integrazione quest' equazione, separandone le variabili, pongo $z =$ ad una funzione di x (che chiamo X), moltiplicata in un' indeterminata u, ovvero faccio $z = Xu$, e $dz =$ Xdu

(l) In luogo del famoso Canone di Mariotte intorno alle Densità dell' Aria, si fa qui uso della seguente analogia sì per rendere più generale la soluzione del Problema, sì ancora per le ragioni addotte dal Sig. D'Alembert nelle sue Riflessioni sopra la Causa Generale de' Venti §. 81., e nel Trattato dell'Equilibrio, e del Moto de' Fluidi §. 81., che potrà il Lettore per propria soddisfazione consultare.

$Xdu + udX$; e sostituendo nell' equazione differenziale , ritraggo $Xdu + udX$

$$+\left(\frac{fgr^n u}{(gA+C)(r+x)^n} - \frac{nu}{r+x}\right) Xdx = -$$

$\frac{fC\,dx}{gA+C}$. Osservo , che le indeterminate sono separabili posto $udX - \frac{nuXdx}{r+x} +$

$\frac{fgr^n uXdx}{(gA+C)(r+x)^n} = o$; donde si ritrae subito $lX = l(r+x)^n + \frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}}$

$+ \, o$ costant. , e quindi $X =$

$$E^{o + l(r+x)^n + \frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}}}$$

(prendendo per E il numero , che ha l' unità per logaritmo) . Dai due termini residui della prima e-

D qua-

quazione si ha $Xdu = -\frac{fCdx}{gA+C}$;

$$du = -\frac{fCdx}{(gA+C)X} = -\frac{fCdx}{gA+C} \times$$

$$E^{\frac{-fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} - l(r+x)^n - \Theta}$$;

onde $u = \int -\frac{fCdx}{gA+C} \times$

$$E^{-\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} - l(r+x)^n - \Theta}$$

$+ \Delta$ cost. 2.ª $= \int -\frac{fCdx}{(gA+C)(r+x)^n} \times$

$$E^{-\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} - \Theta}$$

$+\Delta = -\frac{C}{gr^n} \times$

E

$$E^{-\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} - \theta} + \Delta .$$

Quindi $Xu = -\frac{C}{gr^n} E^{l(r+x)^n} + \Delta \times$

$$E^{\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} + l(r+x)^n + \theta} =$$

$$-\frac{C(r+x)^n}{gr^n} + \Delta (r+x)^n \times$$

$$E^{\theta + \frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}}} .$$

Ora perchè z diventa A quando x diventa zero, sarà $A = -\frac{C}{g} + \Delta r^n \times$

 E

$$E^{\theta+\frac{fgr}{(n-1)(gA+C)}}\ ;\ e\ \Delta = \frac{Ag+C}{gr^n\ E^{\theta+\frac{fgr}{(n-1)(gA+C)}}}\ ;$$

e però $z = \frac{(Ag+C)(r+x)^n}{gr^n} \times$

$$E^{\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} - \frac{fgr}{(n-1)(gA+C)}} - \frac{C(r+x)^n}{gr^n}$$

Il che era ec.

Posta $n=0$, e $C=0$, per l' ipotesi della gravità costante, e delle densità dell'aria proporzionali alle semplici pressioni superiori senz' altra aggiunta della pressione costante, si ricava $z = AE^{-\frac{fx}{A}}$; e in conseguenza $lz = lA - \frac{fx}{A}$. Per illustra-

lustrare ora la Teoria con un esempio solenne, scelgo la famosa osservazione del P. Feuillée, letta nell'Accademia di Parigi, e comunicata da M.r de Lisle al Ch. Sig. Daniello Bernoulli, siccome quelli ne fa fede nella sua grand' Opera d'Idrodinamica; osservazione chiamata da Bernoulli l'*experimentum crucis* de' Fisici, e lo scoglio di tutte le Teorie. *Est illa scopulus*, dic' egli, *ad quem omnes, quæ adhuc lucem aspexerunt, theoriæ illidunt. Hydrod. Sect.* x. §. 23. Al livello del mare stava il mercurio sospeso nel barometro all' altezza di 27. poll. parig. e 10. lin. Portato il barometro sulla cima del monte Pico dell' Isola Teneriffa, si abbassò il mercurio all' altezza di 17. poll. e 5. lin., essendo l' elevazione perpendicolare del monte sopra il livello del mare di 13158. piedi. Sarà dunque a norma di questa osservazione $A = 27.$ poll. 10. lin. $= 334.$ lin.; $x = 13158.$

piedi $= 1894752.$ lin.; $f = \frac{1}{11900.}$, sa-

pendosi per le sperienze di Cotes, che la gravità specifica del mercurio, la qua-

 le.

le nel Problema fa le veci dell' unità, è 11900. volte maggiore di quella dell' aria al livello del mare. Si avrà pertanto $\frac{fx}{A} = \frac{1894752}{3974600} = 0.4767151$. Ora poichè lz, e lA sono logaritmi iperbolici, ed è il logaritmo iperbolico uguale al logaritmo Briggiano, o delle tavole moltiplicato pel logaritmo iperbolico della diecina, cioè per 2. 3025850, denotando con L majuscola il logaritmo Briggiano sarà $lA = 2.3025850\ LA = 2.3025850\ L\ 334 = 2.3025850 \times 2.5237465$. E però $lA - \frac{fx}{A} = 2.3025850 \times 2.5237465 - 0.4767151 = lz = 2.3025850\ Lz$. Dunque in fine

$$Lz = \frac{2.3025850 \times 2.5237465 - 0.4767151}{2.3025850}$$

$$= 2.5237465 - \frac{0.4767151}{2.3025850} = 2.5237465 - 0.2070347 = 2.3167118.$$

Que-

Questo logaritmo 2. 3167118 ha un valor mezzano fra i due logaritmi dei numeri 207, e 208 delle Tavole, cioè fra 2. 3159703, e 2. 3180633, e la sua differenza dal minore è 0. 0007415, e la differenza dei due predetti è 0. 0020930. Quindi per l'analogía à

$$0.0020930 : 0.0007415 :: 1 : \frac{7415}{20930},$$

il numero corrispondente al logaritmo

2. 3167118 sarà 207 $\frac{7415}{20930}$ lin., ovvero

17. poll. 3 $\frac{7415}{20930}$ lin. Sicchè il divario

fra la Teoria, e l'osservazione non arriva ad una linea, e due terzi, che a mille cause accidentali alteratrici dello stato naturale dell'atmosfera può meritamente attribuirsi. Un accordo sì maraviglioso non cesserà mai di sorprenderci, trattandosi di un'Osservazione, dal

Sig. Bernoulli dichiarata fatale a tutte le Teorie. E' per altro da notarsi, che il P. Feuillée sembra aver alzata la sua altronde altissima montagna d' un 140. o 150. pertiche oltre il dovere, siccome osserva e comprova il Bouguer nel Libro della Figura della Terra; il che toglie in parte quel maraviglioso consenso fra l' osservazione ed il calcolo; ma ne lascia però quanto basta per giudicare poco misurata l' espressione del Sig. Bernoulli.

Se ora nell'equaz.[ne] $z = \frac{(Ag+C)}{gr^n}(r+x)^n \times$

$$E^{\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} - \frac{fgr}{(n-1)(gA+C)} - \frac{C(r+x)^n}{gr^n}},$$

si fa $z = 0$, si ricava tosto $CE^{\frac{fgr}{(n-1)(gA+C)}}$

$$= (Ag+C)E^{\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}}}$$; donde final.[te]

rac-

raccogliesi $x = \left(\frac{fgr^n}{fgr + (n-1)(gA+C) l \frac{C}{gA+C}} \right)^{\frac{1}{n-1}} - r$;

valore che rappresenta l' altezza dell' atmosfera, alla sommità della quale la z, ovvero l' elevazione del mercurio si annulla per non esser più quivi dalla pressione dell' aria equilibrato e sostenuto. Posta pertanto $n = 0$, cioè assunta la gra-

vità costante nasce $x = -\frac{(gA+C)}{fg} l \frac{C}{gA+C}$, e

fatta $C = 0$, trovasi $x = -l0 = \infty$, come appunto esser dee nell'ipotesi della gravità costante, e delle densità dell' aria proporzionali a' semplici pesi comprimenti: E un tal valore $x = \infty$ sempre ritroverassi qualora n sia un numero minore dell' unità, come si rende manifesto dalla considerazione della formula.

Ma se sarà n un numero maggiore dell' unità, e $C = 0$, che è quanto dire se si supporrà l' azione della gravità, variabile in ragione inversa d' una poten-

potenza (o intera o frazionaria , ma sempre maggiore dell' unità) delle distanze dal centro terrestre, e la densità dell'aria in ragione semplice de' pesi prementi , allora è chiaro , che diventando infinito nella formola il denominatore del primo termine resta $x = -r$; paradosso il più strano e inaspettato , che possa mai concepirsi , e che sembra certamente meritare la considerazione dei Geometri : giacchè chi vorrebbe mai persuadersi , che trasportato il barometro nel centro della terra tutto il mercurio precipiterà , e lascierà vuoto il cannello ?

Nell' ipotesi Newtoniana, posta $C = 0$, ed $n = 2$, si ha $z = A\left(\frac{r+x}{r}\right)^2 E^{\frac{-frx}{A(r+x)}}$; e facendo $z = 0$, si ottiene $A\frac{(r+x)^2}{r^2} \times E^{-\frac{frx}{A(r+x)}} = 0$; donde risulta tanto

A

$A\frac{(r+x)_n}{r^2}=0$, quanto $E^{\frac{-frn}{A(r+n)}}=0$, e

così da quella, come da questa equazione si ricava sempre $x=-r$; il che per riguardo alla prima è di per se manifesto, e per rispetto alla seconda si raccoglie dall'essere $-\frac{frx}{A(r+x)}=lo=-\infty$, e quindi $frx=\infty(r+x)A$, e finalmente $x=\frac{\infty rA}{fr-\infty A}=\frac{\infty rA}{-\infty A}=-r$; nè potrebbe muoversi dubbio sulla legittimità del supposto, che $\frac{\infty}{\infty}$ sia $=1$, poichè trattandosi qui dello stesso individuo infinito, quel supposto diventa un assioma. Così nell' ipotesi Newtoniana singolarmente, cioè nella vera ipotesi della Natura sussiste l' inaspettato, inconcepibile paradosso della discesa totale del mercurio nel barometro collocato nel centro terrestre. Alcuni Valentuomini interrogati del loro pare-

parere intorno a sissatta stravaganza hanno comunicato alcune loro ingegnosissime idee, delle quali però neppur eglino stessi si sono mostrati contenti. Io recherò qui la più ingegnosa di tutte, uscita dalla penna d'un eccellente Geometra, che al più profondo sapere accoppia la più alta penetrazione. Da questa, che certamente è la più rimarcabile, potrà chicchessia di leggieri far giudizio delle altre: *Per arrivare*, dic' egli, *con sicurezza alla soluzione del singolar paradosso, è da osservarsi, che vi son nell' Analisi alcune formole insufficienti ad esprimere lo stato d'una questione fisica nella sua estensione totale, e che per comprenderne tutti i casi possibili fa d'uopo adoprare alcune mutazioni nelle medesime. Così per esempio chiamandosi* a *la distanza d'un corpo dal centro delle forze, ed* u *la velocità di esso nel caso, che fosse animato da una potenza centrale variabile in ragione inversa dei quadrati delle distanze, sarebbe, contando le* x

dal principio del moto, $udu = \frac{dx}{(a-x)^2}$; *onde*

anche dall' altra parte del centro sarebbe du *posi-*

positivo; ciò che essendo un assurdo limita la realità della prima formola per la soluzione di tal Problema Meccanico fino al caso di $x = a$ *sostituendo per gli altri, cioè quando* $x > a$, *il negativo valore di essa*, $udu = \frac{-dx}{(a-x)^2}$. *Ora nel Problema atmosferico a* dx *positivo dee corrispondere per lo stato della questione* dz *negativo*, e a - dx, † dz : *Vediamo adunque, se nella formula, che rappresenta il valore di* z, *si verificano generalmente le condizioni accennate, o se per certi valori di* x *faccia d'uopo il mutare i segni d' alcuni termini per soddisfarvi. Essendo*

$$\frac{dz}{z} = \frac{2Ardx + 2Axdx - fr^2dx}{A(r+x)^2}$$

sarà negativo dx, *finchè* $r + x < \frac{fr^2}{2A}$; *onde per qualunque* $r + x$ *maggiore bisognerebbe trasformare*

mare la formola in $lz = lA - 2l\frac{r+x}{r}$ $+\frac{frx}{A(r+x)}$, *che darebbe appunto* $\frac{dz}{z} =$ $\frac{-2Ardx - 2Axdx + fr^2dx}{A(r+x)^2}$, *negativo nella serie degli altri casi di* $r+x > \frac{fr^2}{2A}$; *e ciò nell' ipotesi di* x *positivo*. *Similmente posto* x *negativo per assegnare i valori delle barometriche altezze sotto la superficie terrestre sarà* $lz = lA + 2l\frac{r-x}{r} + \frac{frx}{A(r-x)}$, *onde* $\frac{dz}{z} =$ $\frac{-2Ardx + 2Axdx + fr^2dx}{A(r-x)^2}$, *cioè sarà come non deve essere, crescendo le* x *dopo il centro*

tro sotto la superficie medesima, sempre positivo il differenziale dz, *supposto* $x > r - \frac{fr^2}{2A}$; *onde per aver la barometrica altezza nel centro bisognerà scriver la formola trasformata in* $\frac{dz}{z} = \frac{2Ardx - 2Axdx - fr^2dx}{A(r-x)^2}$,

cioè $lz = lA - 2\ l\frac{r-x}{r} - \frac{frx}{A(r-x)}$, *che nel caso di* $x = r$, *diventa* $lz = lA + 2\infty - \infty$, *cioè* $lz = \infty$, *e* $z = \infty$, *come appunto dee ritrovarsi*.

Per conoscere appieno l'insussistenza di questa altronde sagacissima dilucidazione, lasciando per ora da parte le difficoltà, che contro l'ultima trasformazione della formula con tutta ragione potrebbero muoversi, basta soltanto riflettere, che quivi supponsi come un assioma $2\infty - \infty = \infty$, quando certamente qui non si trat-

tratta dello ſteſſo individuo infinito (e allora quel principio ſarebbe incontraſtabilmente un aſſioma), ma di due infiniti di ſpecie diverſa, anzi talmente diverſa, che il ſecondo è incomparabilmente maggiore del primo: Avvegnacchè è principio notiſſimo e incontraſtabile, che il negativo logaritmo di zero rappreſenta la ſerie armonica infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ec.},$$ e

l'unità diviſa per lo zero eſprime l'infinita ſerie delle unità $1+1+1+1+1+$ ec., delle quali due ſerie, queſta ſeconda è incomparabilmente maggiore della prima, ſiccome è faciliſſimo dimoſtrare. Quindi è, che ſi avrebbe in tal caſo lz

$$= lA - 2lo - \frac{fr^2}{o} = -\infty\text{; non già } lz = \infty\text{:}$$

onde ſarebbe anzi $z = o$, che $z = \infty$ come pretendeſi. Che ſe queſto metodo di paſſare dai numeri ai logaritmi per determinare il valore di z quando ſi urta in qualche valore infinito, foſſe un metodo ſicuro, non mai fallace, nè mai conducente

ad

ad assurdi, potrebbe senz' altra trasformazione della formula ritrovarsi infinito il valore di z: poichè essendo $z = A\left(\frac{r+x}{r}\right)^a \times$

$$E^{\frac{-frx}{A(r+x)}}$$, passando ai logaritmi sarà $lz =$

$$lA + a\,l\frac{r+x}{r} - \frac{frx}{A(r+x)}$$; e però fatta $x = -r$,

si avrà $lz = lA + alo + \frac{fr^a}{o} = \frac{fr^a}{o} + alo =$

$$\frac{fr^a}{o} - a\,\infty = \infty$$ per essere il primo termine immensamente maggior del secondo: e quindi $z = \infty$. Per tal modo potrebbe sembrare a taluno con questa mia osservazione sciolto e dileguato il paradosso: ma io non ne sono punto contento, e sono anzi lontanissimo dal credere giusta ed esatta la spiegazione, sapendo

 per

per esperienza, e per migliaja d'esempj essere fallacissimo il passaggio che fassi da' numeri a' logaritmi per determinare il valor d'un'incognita qualunque volta s'incontra l'una, o l'altra delle due espressioni $alo + \frac{b}{o}$, oppure $- alo - \frac{b}{o}$. In questi casi è sempre più sicuro partito il dedurre dalle quantità istesse, senza passare ai loro logaritmi, il valore dell'incognita che si ricerca. Ma ingegniamoci ormai di recare qui, e assoggettare alla penetrazione de' Geometri la vera, esatta, e compita soluzione d'un nodo cotanto strano, e d'un paradosso così singolare:

Quando dall'equaz.^{e} $z = \frac{(Ag+C)}{gr^n}(r+x)^n \times$

$$E^{\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} - \frac{fgr}{(n-1)(gA+C)}} - \frac{C(r+x)^n}{gr^n};$$

posta $z = o$, si raccoglie $x = - r$ pel fattore

tore $(r+x)^n = 0$; per assicurarsi della giustezza, e genuinità di siffatta illazione bisogna indispensabilmente osservare ciò che da essa risulta in tutta la quantità

$$\frac{(Ag+C)}{gr^n}(r+x)^n \, E^{\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)(r+x)^{n-1}} - \frac{fgr}{(n-1)(gA+C)}}$$

$-\frac{C(r+x)^n}{gr^n}$. Ora questa quantità diventa in tal supposizione $0 \, E^{\frac{fgr^n}{0}} =$

$0 \, E^{\infty} = 0 \times \infty$, espressione vaga, equivoca, e indeterminata, la quale, come può vedersi nell' eccellente Opera del Calcolo Differenziale del grand' Eulero, non fa conoscer nulla, e lascia la questione indecisa; perchè in fatti ad ∞ sostituendo $\frac{a}{0}$, si trasforma $0 \times \infty$ in $\frac{0}{0}$,

espressione, come ognun sa, indeterminata ed ambigua, nella quale, qualor s'avvengono i Geometri, si studiano coi conosciuti artifizj di evitarla. Per isfuggire adunque un risultato sì ambiguo, facciasi $x = -r + dx$, ovvero suppongasi trasportato il barometro ad una distanza infinitesima dal centro terrestre di quà dal medesimo; e surrogato questo valore di x nella formula si otterrà $z =$

$$\frac{(Ag+C)}{gr^n}dx^n E^{\frac{fgr^n}{(n-1)(gA+C)dx^{n-1}} - \frac{fgr}{(n-1)(gA+C)}}$$

$$- \frac{C\,dx^n}{gr^n} = \frac{(Ag+C)}{gr^n} E^{\infty} dx^n.$$

Pertanto la quantità $\frac{(Ag+C)}{gr^n} dx^n E^{\infty}$

è indubitatamente infinita: imperciocchè è noto dalla Geometria Infinitesimale, che qualunque numero maggiore dell' unità, alzato ad un' infinita potenza, diventa un infinito d' un grado sì eccel-

so,

so, che svanisce al di lui confronto qualsivoglia potenza dell' infinito. Essendo adunque $E = 2.71828183$, E^{∞} benchè moltiplicato nell' infinitesimo dx^n sarà sempre un infinito di altissimo grado; e però z sarà in tal caso, come dev' essere, infinita. Lo stesso dimostrasi per l' ipotesi Newtoniana nella formula speciale $z = \frac{A(r+x)^2}{r^2} E^{-\frac{frx}{A(r+x)}}$; poichè sostituendo in essa per x il valore anzidetto $-r+dx$, nasce $z = \frac{Adx^2}{r^2} E^{\frac{fr^2}{Adx}}$

$= \frac{Adx^2}{r^2} E^{\infty} = \infty$ di ordine elevatissimo. E così rimane pienamente tolto l'assurdo della discesa del mercurio nel ba-

rometro portato al centro della Terra, e dicifrato il singolare stravagantissimo paradosso. Ma per togliere qualunque scrupolo, che potesse altrui sorgere in mente intorno a questo nostro scioglimento del proposto inviluppo, risponderemo ora adequatamente alle difficoltà, che potrebbero farsi contro la nostra spiegazione, e che a taluno potrebbero parere invincibili. Può obbiettarsi primieramente, che portato il barometro ad una distanza infinitesima dal centro terrestre, non al di qua, come dianzi, ma bensì al di là del medesimo, o veramente, che è lo stesso, fatta $x = -r - dx$, si ritrova nullo il valore di z, che è quanto dire si urta nello stesso scoglio di prima. In fatti nella formula $z =$

$$'A\left(\frac{r+x}{r}\right)^{n} E^{\frac{fr^{n}}{(n-1)A(r+x)^{n-1}} - \frac{fgr}{(n-1)gA}},$$

nella quale per maggior semplicità si è annullata la C, surrogando per x il suo valore $-r-dx$, risulta tostamente $z =$

'A

$$A\left(\frac{-dx}{r}\right)^n E^{\frac{fr^n}{(n-1)A(-dx)^{n-1}} - \frac{fr}{A(n-1)}}$$; onde

supposto n un numero intero pari, o anche una frazione maggiore dell'unità, ma di numeratore pari, e di denominatore dispari, sarà $z = \frac{Adx^n}{r^n} E^{\frac{-fr^n}{(n-1)Adx^{n-1}}}$

$= \frac{Adx^n}{r^n} E^{-\infty} = \frac{Adx^n}{r^n E^{\infty}} = 0$: e lo stesso ricavasi per l'ipotesi Newtoniana

dalla formula $z = A\left(\frac{r+x}{r}\right)^n E^{\frac{-frx}{A(r+x)}}$,

nella quale fatta la sostituzione di $-r-dx$ in luogo di x si ottiene $z =$

$$\frac{Adx^2}{r^2}E^{\frac{-fr^2}{Adx}} = \frac{Adx^2}{r^2}E^{-\infty} = \frac{Adx^2}{r^2E^{\infty}} = 0.$$

Per levare interamente questa assai speciosa difficoltà, è necessario avvertire, che la flussione della z per tutta la discesa fino al centro della Terra, o pei valori negativi di x da o fino a $-r$ è assolutamente positiva, salendo vie maggiormente il mercurio quanto più si discende dalla superficie verso il centro; ma diventa tosto negativa appena oltrapassato il centro verso la parte opposta, cominciando ivi il mercurio a discendere fino alla sommità inferiore dell' atmosfera, dove non è più sostenuto. Ciò premesso, piglisi della formula

$$z = \frac{A(r+x)^n}{r^n}E^{\frac{fr^n}{(n-1)A(r+x)^{n-1}} - \frac{fgr}{(n-1)gA}}$$

la flussione logaritmica; e si avrà

dz

$$\frac{dz}{z}=\frac{ndx}{r+x}-\frac{fr^n dx}{A(r+x)^{n-1}}=\frac{nA(r+x)^{n-1}dx-fr^n dx}{A(r+x)^n};$$

e però supposta x negativa, cioè $-x$, diventa $\frac{dz}{z}=\frac{fr^n dx-nA(r-x)^{n-1}dx}{A(r-x)^n}$, valore positivo a motivo di $fr^n > nA(r-x)^{n-1}$,

ovvero di $x > r - r\sqrt[n-1]{\frac{fr}{nA}}$: quindi è

che questa formula differenziale servirà per tutta la discesa dalla superficie della Terra fino al centro, cosicchè pigliando la fluente colla debita aggiunta della costante, ovvero $lz = lA +$

$l\frac{(r-x)^n}{r^n}+\frac{fr^n}{(n-1)A(r-x)^{n-1}}-\frac{fr}{(n-1)A}$, e conseguentemente $z=\left(\frac{r-x}{r}\right)^n\times$

$$E^{\frac{fr^n}{(n-1)A(r-x)^{n-1}} - \frac{fr}{(n-1)A}}$$, e posta

$-x = -r + dx$, che indica il luogo infinitamente vicino al centro per di qua dal medesimo, risulta $z =$

$$\frac{Adx^n}{r^n} E^{\frac{fr^n}{(n-1)A\,dx^{n-1}}} = \frac{Adx^n}{r^n} E^{\infty}$$

$= \infty$ come appunto per questo istesso caso si era dianzi ritrovato. Ma siccome appena oltrepassato il centro divien negativa la flussione dz; sarà perciò di mestieri cambiare i segni della formula differenziale per determinare l'altezza del barometro di là dal centro ad una distanza infinitamente piccola dal medesimo;

onde sarà $\frac{dz}{z} = \frac{nA(r-x)^{n-1}dx - fr^n dx}{A(r-x)^n}$;

e integrando, coll'aggiunta necessaria della costante, $lz = lA - l\left(\frac{r-x}{r}\right)^n$

$$-\frac{fr^n}{(n-1)A(r-x)^{n-1}}+\frac{fr}{(n-1)A}\text{, e } z=\frac{Ar^n}{(r-x)^n}\times$$

$$E^{\frac{-fr^n}{(n-1)A(r-x)^{n-1}}+\frac{fr}{(n-1)A}}$$

: Pigliando ora $-x=-r-dx$, che è quanto dire portato il barometro al di là del centro della Terra per uno ſpazio infiniteſimo, fatta la ſoſtituzione di quel valore in luogo di $-x$, naſce $z=\frac{Ar^n}{(-dx)^n}E^{\frac{-fr^n}{(n-1)A(-dx)^{n-1}}}=$ (ſuppoſto n pari) $\frac{Ar^n}{dx^n}E^{\frac{fr^n}{(n-1)Adx^{n-1}}}$ $=\frac{Ar^n}{dx^n}E^{\infty}=\infty$ di elevatiſſimo grado.

Medeſimamente nell' ipoteſi Newtoniana eſſendo, oltre il centro, $\frac{dz}{z}=\frac{2dx}{r-x}$

—

$-\frac{fr^n dx}{A(r-x)^n}$; e $lz = l\left(\frac{r}{r-x}\right)^2 A - \frac{fr^2}{A(r-x)} + \frac{fr}{A}$;

e $z = \frac{Ar^2}{(r-x)^2} E^{\frac{-fr^2}{A(r-x)} + \frac{fr}{A}} = \frac{Ar^2}{(r-x)^2} E^{\frac{-frx}{A(r-x)}}$;

surrogato $-r-dx$ in luogo di $-x$ si ritrae $z = \frac{Ar^2}{dx^2} E^{\frac{-fr^2}{-Adx}} = \frac{Ar^2}{dx^2} E^{\frac{fr^2}{Adx}} =$

$\frac{Ar^2}{dx^2} E^{\infty} = \infty$, come esser dee.

E così resta pienamente sciolta e dileguata la proposta difficoltà, unicamente nata dal non riflettere alla necessità del cambiamento de' segni nella formula differenziale in caso dell'essersi oltrepassato il centro terrestre, non mai però nel caso di essersi portato il barometro precisamente nel centro siccome pretendeva il sullodato ingegnosissimo Geometra.

Convien ora esaminare que' casi, ne' quali si assume infinita la x, ovvero infinita l'altezza dell'atmosfera; per andare al

al riparo d' un' altra fpeciofiffima difficoltà, che quindi potrebbe dedurfi contro la foluzione precedente del paradoffo. E' noto a' Fifico-Matematici, che dall' ipotefi delle denfità dell' aria femplicemente proporzionali alle compreffioni dee rifultare infinita l' altezza dell' atmosfera, effendo di per fe manifefto, che in cotal legge delle denfità, alla compreffione nulla, o diminuita oltre ogni limite, dee corrifpondere nulla, o diminuita oltre ogni limite la denfità, e viceverfa aumentata oltre qualunque termine la rarefazione del fluido; il qual fluido in confeguenza di tale infinita efpanfione s' innalzerà fopra la fuperficie terreftre in infinito. Quefta aftratta o geometrica verità del Mondo intellettuale e ideale è una fpecie di contraddizione nel mondo fifico e reale; contraddizione da noi declinata nella foluzione del Problema mercè l' affunzione d' un' altra legge nella variazione delle denfità, fuppofte cioè proporzionali non alle femplici compreffioni, ma alle medefime congiunte ad un' altra preffione coftante e invariabile. E' certo pertanto e incontraftabile, che nell' ipotefi delle denfità dell' aria proporzionali alle femplici pref-

fioni

ſioni il mercurio non potrà mai diſcender tutto nel barometro ſe non allor quando venga portato ad un' altezza infinita ſopra la ſuperficie della Terra, ovvero alla ſommità dell'atmosfera infinita, dove non eſſendo più aria che prema, ubbidirà il mercurio alla nativa ſua gravità, e ſi metterà a livello coll' altro. Conſiderata ora nell' ipoteſi di $C = o$ la formula $z =$

$$\frac{A(r+x)^n}{r^n} E^{\frac{fr^n}{(n-1)A(r+x)^{n-1}} - \frac{fr}{(n-1)A}},$$

e fatta $x = \infty$, ſi ritrova $z = \infty^n \times$

$$E^{\frac{fr^n}{\infty^{n-1}} - \frac{fr}{(n-1)A}} = \infty^n \frac{E^{\frac{fr^n}{\infty^{n-1}}}}{E^{\frac{fr}{(n-1)A}}} =$$

$\infty^n E^{\frac{fr^n}{\infty^{n-1}}}$. Ma $E^{\frac{fr^n}{\infty^{n-1}}}$ è quantità finita, e non maggiore dell' unità: avve-

avvegnacchè la radice infinitesima di qualunque finita quantità altro non è che l' unità, siccome apparisce dal porre per esemp. $a^{\frac{m}{\infty}} = y$, e però $\frac{m}{\infty}\, la = 0 = ly$; onde $y = 1 = a^{\frac{m}{\infty}}$. Sarà dunque $\infty^n E^{\frac{fr^n}{\infty^{n-1}}} = \infty^n$; e conseguentemente $z = \infty$, quando per l' opposto dovea ritrovarsi $z = 0$.

Per togliere questo inciampo è d' uopo ricorrere alla flussione logaritmica $\frac{dz}{z}$

$$= \frac{-fr^n dx}{A(r+x)^n} + \frac{ndx}{r+x} = \frac{nA(r+x)^{n-1}\, dx - fr^n dx}{A(r+x)^n},$$

la quale è positiva in tutti i casi, in cui

$$(r+x)^{n-1} > \frac{fr^n}{nA}, \text{ oppure } x > r\sqrt[n-1]{\frac{rf}{nA}} - r:$$

e in questi casi dovendo per l'opposto essere negativa la flussione dz, perchè ascenden-

dendo sopra la superficie terrestre si abbassa il mercurio nel barometro, sarà perciò necessario e indispensabile di cambiare i segni della formula in questa guisa $\frac{dz}{z} = \frac{fr^n dx - nA(r+x)^{n-1} dx}{A(r+x)^n}$, la di cui fluente è $lz = lA - nl(r+x) + nlr - \frac{fr^n}{(n-1)A(r+x)^{n-1}} + \frac{fr}{(n-1)A} = l\frac{Ar^n}{(r+x)^n} + \frac{fr}{(n-1)A} - \frac{fr^n}{(n-1)A(r+x)^{n-1}}$; onde si avrà $z = \frac{Ar^n}{(r+x)^n} \times E^{\frac{-fr^n}{A(n-1)(r+x)^{n-1}} + \frac{fr}{(n-1)A}}$; e però posta $x = \infty$, nascerà $z = \frac{Ar^n}{\infty^n} \times$

E

$$E^{-\frac{fr^n}{(n-1)A\,\infty^{n-1}} + \frac{fr}{(n-1)A}} = \frac{Ar^n\, E^{\frac{fr}{[n-1]A}}}{\infty^n\, E^{\frac{fr^n}{(n-1)A\,\infty^{n-1}}}}$$

= o, come appunto dee ritrovarsi. E per tal modo si sfugge anche quest'altro offendicolo, che avrebbe potuto imbarazzare i meno esperti, e far loro smarrire la via. Con somigliante discorso prese le x negative, e andando di là dal centro ad un'infinita distanza si proverà, che il valore di z è nullo, come esser dee. Imperciocchè essendo per le x negative l'equazione flussionaria $\frac{dz}{z} = \frac{fr^n dx - nA(r-x)^{n-1}dx}{A(r-x)^n}$ di valore positivo, come già si è osservato, e di là dal centro terrestre diventando per lo contrario negativa la flussione dz per la depressione, che quivi comincia a seguir nel barometro, ne viene in conseguenza, che fatta la debita mutazione de' segni nella formula si avrà $\frac{dz}{z} = \frac{ndx}{r-x}$

$-\frac{fr^n dx}{A(r-x)^n}$; e quindi integrando $lz =$

$-nl(r-x) + nlr + lA - \frac{fr^n}{A(n-1)(r-x)^{n-1}} +$

$\frac{fr}{A(n-1)} = l\frac{Ar^n}{(r-x)^n} - \frac{fr^n}{A(n-1)(r-x)^{n-1}} + \frac{fr}{A(n-1)}$;

e finalmente $z = \frac{Ar^n}{(r-x)^n} \times$

$E^{-\frac{fr^n}{A(n-1)(r-x)^{n-1}} + \frac{fr}{A(n-1)}}$; nella qual equazione facendo $-x = -\infty$, se ne

deduce $z = \frac{Ar^n}{(-\infty)^n} E^{-\frac{fr^n}{[n-1]A[-\infty]^{n-1}} + \frac{fr}{A(n-1)}}$

$=$

$$= \frac{Ar^n}{(-\infty)^n} E^{\frac{fr}{(n-1)A}} = 0$$, ficcome effer dovea , laddove fenza quella mutazione de' fegni farebbe risultato $z = \infty$; affurdo massimo e irreparabile fenza l' artifizio del cambiamento de' fegni .

Merita ora di effere confiderato il cafo di $n = 1$, o fia della gravità variabile nella ragione inverfa femplice delle distanze dal centro , il qual cafo non può effer comprefo nella formula $z = \frac{Ar^n}{(r+x)^n} \times$

$$E^{-\frac{fr^n}{A(n-1)(r+x)^{n-1}} + \frac{fr}{A(n-1)}}$$

a motivo dell' efponente zero , di cui troverebbesi affetta la variabile ; il che è fempre un indizio , che la generale integrazione della formula non è adattabile a questo cafo . Sarà perciò neceffario di fare un paffo indietro , e ricorrere alla flussione loga-

 ritmi-

ritmica, che farà in tal ipoteſi $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{r+x} - \frac{frdx}{A(r+x)}$, il di cui integrale è

$$lz = l(r+x) - \frac{fr}{A}\, l(r+x) + lA + \frac{fr}{A} lr - lr = l\,\frac{A(r+x)}{r} + l\left(\frac{r}{r+x}\right)^{\frac{fr}{A}} = lA\left(\frac{r}{r+x}\right)^{\frac{fr-A}{A}};$$ e

però $z = A\left(\frac{r}{r+x}\right)^{\frac{fr-A}{A}}$. Ponendo pertanto in queſt' equazione la $x = -r$, trovaſi $z = \infty$, ſiccome deve appunto accadere qualunque volta la gravità ſeguiti nel ſuo variare una qualche ragione inverſa delle diſtanze dal centro. Per lo contrario poſta $x = \infty$, naſce $z = 0$ come eſſer dee alla ſommità dell' atmosfera.

Che

Che se la gravità varierà nella ragione inversa d'una potenza frazionaria, minore dell'unità, delle distanze dal centro terrestre, ovvero se sarà $n = \frac{m}{m+t}$; allora la flussione logaritmica diventa $\frac{dz}{z} = -$

$$\frac{fr^{\frac{m}{m+t}}\,dx}{A(r+x)^{\frac{m}{m+t}}} + \frac{mdx}{(m+t)(r+x)} = -$$

$$\frac{(m+t)\,fr^{\frac{m}{m+t}}\,(r+x)\,dx + mA\,(r+x)^{\frac{m}{m+t}}}{(m+t)A\,(r+x)^{\frac{2m+t}{m+t}}},$$

la quale essendo negativa, come è manifesto, servirà per tutte le altezze barometriche nell' ascendere sopra la superficie terrestre; onde integrando si

otterrà $z = A\left(\frac{r+x}{r}\right)^{\frac{m}{m+t}} \times$

$$E^{\frac{-(m+t)fr^{\frac{m}{m+t}}(r+x)^{\frac{t}{m+t}} + (m+t)fr}{tA}};$$

e posta $x = \infty$, si avrà $z = \frac{\infty^{\frac{m}{m+t}}}{E^{\infty^{\frac{t}{m+t}}}}$,

e per essere il denominatore di questa frazione infinitamente maggiore del numeratore, siccome è noto, sarà $z = 0$, conforme esser dee. Per ritrovare poi il valore di z nel centro terrestre, nel qual caso essendo la x negativa, o sia $-x$ la flussione diventa $\frac{dz}{z} = \frac{fr^{\frac{m}{m+t}}\,dx}{A(r-x)^{\frac{m}{m+t}}} -$

mdx

$$-\frac{m dx}{(m+t)(r-x)} =$$

$$\frac{(m+t) fr^{\frac{m}{m+t}} (r-x) dx - mA(r-x)^{\frac{m}{m+t}} dx}{(m+t) A (r-x)^{\frac{2m+t}{m+t}}},$$

cioè positiva, come è evidente, e però atta ad esprimere la salita del mercurio nel discendere sotto la superficie terrestre verso il centro; fattane l' integrazione si ricaverà $z = A\left(\frac{r-x}{r}\right)^{\frac{m}{m+t}} \times$

$$E \frac{-(m+t) fr^{\frac{m}{m+t}} (r-x)^{\frac{t}{m+t}} + (m+t) fr}{tA}.$$

Ma se ora in questa equazione in luogo di $-x$ si sostituisce $-r$ per ottenere il valore di z nel centro, ritrovasi $z = 0$,

 quan-

quando dovea pur ritrovarsi $z = \infty$: Quest' altro nodo, che qui sorge improvviso, sembra tanto più difficile a svilupparsi quanto meno sembra praticabile in questo caso l' artifizio dianzi adoperato del cambiamento de' segni nella formula differenziale, nella quale essendo positivo il valore della flussione dz è tale appunto quale esser dee. Studiamoci per tanto di sbrogliare anche questo inviluppo: Egli è certo e indubitato, che discendendo verso il centro terrestre, la quantità $r - x$, che si va vieppiù impicciolendo, dee pervenire ad un tal grado di picciolezza, che il valore di

$$\frac{(m+t) f r^{\frac{m}{m+t}} (r-x)\, dx - m A (r-x)^{\frac{m}{m+t}}\, dx}{(m+t) A\, (r-x)^{\frac{2m+t}{m+t}}}$$

riuscirà negativo, e però avrassi

$m A (r-x)^{\frac{m}{m+t}} > (m+t) f r^{\frac{m}{m+t}} (r-x)$; il che si rende evidente col riflettere, che quando $r - x$ è infinitesimo, come accade nel momento di toccare il centro, allora

lora $mA(r-x)^{\frac{m}{m+t}}$ diventa incomparabilmente maggiore di $(m+t)fr^{\frac{m}{m+t}}(r-x)$, essendo principio notissimo, che qualunque potestà frazionaria $\frac{m}{m+t}$ d'un infinitesimo è infinitamente maggiore dello stesso infinitesimo semplice. Dunque anche in questo caso per ottenere il valore di z nel centro della Terra è indispensabile cangiar i segni della formula differenziale trasformandola in $\frac{dz}{z}=$

$$\frac{mA(r-x)^{\frac{m}{m+t}}dx-(m+t)fr^{\frac{m}{m+t}}(r-x)\,dx}{(m+t)A(r-x)^{\frac{2m+t}{m+t}}},$$

li

il di cui integrale è $z = A\left(\frac{r}{r-x}\right)^{\frac{m}{m+t}} \times$

$$E^{\frac{(m+t)fr^{\frac{m}{m+t}}.(r-x)^{\frac{t}{m+t}} - (m+t)fr}{tA}}.$$

Quindi facendo $-x = -r$ cangiasi z in

$$\frac{Ar^{\frac{m}{m+t}}\ E^{\frac{-(m+t)fr}{tA}}}{0}$$, ovvero in ∞,

come dovea pur ritrovarsi. Ed ecco sciolto e dileguato questo nuovo paradosso, che sembrava ad un tratto insolubile.

Resta a vedere qual sarà il valore di z di là dal centro terrestre. In questo supposto per non urtare in assurdi convien procedere con tutta la circonspezione, ed esaminare minutamente ogni cosa. Due casi pertanto è d'uopo distinguere nella presente supposizione; cioè o t è un numero dispari, o t è un numero pari.

Caso

Caso I.° di t numero dispari.

In tal caso o anche m sarà dispari, o m sarà pari. Non può essere il primo, poichè allora diverrebbe immaginaria la flussione dz. E in fatti nell' equazione flussionaria $\frac{dz}{z} = \frac{fr^{\frac{m}{m+t}}dx}{A(r-x)^{\frac{m}{m+t}}} - \frac{mdx}{(m+t)(r-x)}$ diventando $r-x$ di là dal centro una quantità negativa, e l' esponente $\frac{m}{m+t}$ avendo il numeratore dispari, e il denominatore pari come composto di due dispari; ne viene in conseguenza, che $(r-x)^{\frac{m}{m+t}}$ è una quantità immaginaria, e quindi immaginario anche il valore della flussione dz. Non può dunque, essendo t un numero dispari, tale essere il numero m. Adunque m sarà un numero

pari:

pari: ed allora i termini $\frac{fr^{\frac{m}{m+t}}\, dx}{A(r-x)^{\frac{m}{m+t}}}$ –

$\frac{mdx}{(m+t)\,(r-x)}$ saranno, come è eviden-

te, ambedue positivi, e però positiva la dz, la quale andando di là dal centro dee per l'opposto essere negativa. Sarà quindi mestieri cambiar i segni della suddetta formula, e convertirla in $\frac{dz}{z}$

$$= \frac{mdx}{(m+t)\,(r-x)} - \frac{fr^{\frac{m}{m+t}}\, dx}{A(r-x)^{\frac{m}{m+t}}}$$, la di cui

fluente è $z = A\left(\frac{r}{r-x}\right)^{\frac{m}{m+t}} \times$

E

$$E^{\frac{(m+t)\, f r^{\frac{m}{m+t}} (r-x)^{\frac{t}{m+t}} - (m+t)\, fr}{tA}},$$

che esprimerà le altezze dal barometro oltra il centro della Terra. Posta ora $-x = -\infty$ per esplorare se si annulla la z, come il caso dimanda, si ottiene $z =$

$$A\left(\frac{r}{-\infty}\right)^{\frac{m}{m+t}} E^{\frac{(m+t) f r^{\frac{m}{m+t}} (-\infty)^{\frac{t}{m+t}} - (m+t) fr}{tA}};$$

ovvero essendo m pari, t, ed $m+t$ dispari si ha $z = A\left(\frac{r}{\infty}\right)^{\frac{m}{m+t}} \times$

$$E^{-\frac{(m+t) f r^{\frac{m}{m+t}} \infty^{\frac{t}{m+t}} - (m+t) fr}{tA}} =$$

$$\frac{A r^{\frac{m}{m+t}}}{\infty^{\frac{m}{m+t}} \, E^{\frac{(m+t) f r^{\frac{m}{m+t}} \infty^{\frac{t}{m+t}}}{tA}}} = 0 \, ;$$

che è appunto ciò che aſpettavaſi.

Caſo II.° di t numero pari.

In queſto caſo o ancora m ſarà numero pari, o ſarà diſpari. Il primo non può eſſere, perchè allora nella frazione $\frac{m}{m+t}$ ſarebbe così il numeratore, come il denominatore un numero pari, ed eſſa frazione non ſarebbe ridotta alla più ſemplice eſpreſſione, e ai minimi termini, come pur ſi ſuppone. Sarà perciò m un numero diſpari; e diſpari eziandio $m+t$; onde nella formula differenziale $\frac{dz}{z} =$

$\frac{f r^{\frac{m}{m+t}} dx}{A(r-x)^{\frac{m}{m+t}}} - \frac{m dx}{(m+t)(r-x)}$ sarà negativo il termine $\frac{f r^{\frac{m}{m+t}} dx}{A(r-x)^{\frac{m}{m+t}}}$, e positivo il seguente; e oltrepassando il centro terrestre per un lunghissimo tratto, diventerà

$-\frac{f r^{\frac{m}{m+t}} dx}{A(r-x)^{\frac{m}{m+t}}}$ incomparabilmente maggiore di $-\frac{m dx}{(m+t)(r-x)}$; e sarà in conseguenza negativo il valore di $\frac{f r^{\frac{m}{m+t}} dx}{A(r-x)^{\frac{m}{m+t}}}$

-

$$-\frac{m\,dx}{(m+t)\,(r-x)} = \frac{dz}{z}$$, quale appunto è necessario che sia. Passando ora all' integrazione della formula si troverà $z =$

$$A\left(\frac{r-x}{r}\right)^{\frac{m}{m+t}} E^{-\frac{(m+t)fr^{\frac{m}{m+t}}(r-x)^{\frac{t}{m+t}}+(m+t)fr}{tA}}$$

per le altezze del barometro di là dal centro della Terra: e se in questa espressione in vece di $-x$ si sostituisce $-\infty$ per osservare cosa sarà del barometro trasportato alla sommità opposta dell' atmosfera infinita, si scuopre $z = A\left(\frac{-\infty}{r}\right)^{\frac{m}{m+t}} \times$

$$E^{-\frac{(m+t)fr^{\frac{m}{m+t}}(-\infty)^{\frac{t}{m+t}}+(m+t)fr}{tA}}$$, ovvero

vero per essere t pari, m, ed $m + t$ dispari ricavasi $z = -\dfrac{A}{r^{\frac{m}{m+t}}}\ \infty^{\frac{m}{m+t}} \times$

$$E^{-\frac{(m+t)fr^{\frac{m}{m+t}}\ \infty^{\frac{t}{m+t}} + (m+t)fr}{tA}} =$$

$$-\frac{A\sqrt[m+t]{\dfrac{\infty^m}{r^m}}}{E^{\frac{(m+t)f\sqrt[m+t]{r^m\ \infty^t} - (m+t)fr}{tA}}}.$$ In

questa frazione il denominatore

$$E^{\frac{(m+t)f\sqrt[m+t]{r^m\ \infty^t}}{tA}}$$ è infinitamen-

G te

te maggiore del numeratore $A \sqrt[m+1]{\frac{\infty^m}{r^m}}$,

come è noto dalla Geometria degl' Infiniti. Dunque z sarà = o quale necessariamente dee risultare dove manca interamente la pressione dell' aria atmosferica.

Svolti in tàl guisa tutti i nodi, che nel considerare minutamente le varie faccie o circostanze di questo Problema s'incontrano, e tolti di mezzo tutti gli ostacoli, che pare di primo lancio ne contendano all'analisi l'accesso, e ne impediscano l'applicazione; sarà ora opportuno di ridurre brevemente a disamina il caso delle densità dell' aria non più proporzionali ai semplici pesi prementi, ma ad una potenza qualunque, intera, o frazionaria, positiva, o negativa dei medesimi; ipotesi, che non manca di fautori e di appoggj, e che qui dimostrar si potrebbe, se l' argomento il permettesse, non affatto priva di fondamento. Per risolvere adunque in tal ipotesi il Problema, chiamisi *m* l'esponente della potenza de' pesi comprimenti; e nell'equazione

ne differenziale dianzi ritrovata $qdx = -dz + \frac{nzdx}{r+x}$ si sostituisca a q il suo valore

$\frac{fr^{mn} z^m}{A^m (r+x)^{mn}}$ dedotto dall'analogia $g^m A^m : \frac{g^m r^{mn} z^m}{(r+x)^{mn}} :: f : q$, e l'equazione diverrà

$$\frac{fr^{mn} z^m dx}{A^m (r+x)^{mn}} = -dz + \frac{nzdx}{r+x}.$$

Per assegnarne la fluente, pongasi come sopra $z = Xu$, esprimendo X una funzione di x, ed u un' indeterminata qualunque. Essendo pertanto $-dz = -Xdu - udX$; $z^m = X^m u^m$, fatte queste sostituzioni nella precedente equazione, si

raccoglie $\frac{fr^{mn} X^m u^m dx}{A^m (r+x)^{mn}} = - Xdu -$

 udX

$udX + \frac{nXudx}{r+x}$. Per ottenere la separazione delle variabili, facciasi $\frac{nXudx}{r+x} - udX = 0$, ovvero $\frac{n\,dx}{r+x} = \frac{dX}{X}$, oppure $l(r+x)^n = lX + \bullet$, o finalmente (esprimendo E il numero, il di cui logaritmo iperbolico è l' unità) $(r+x)^n = XE^{\bullet}$, ed $X = (r+x)^n E^{-\bullet}$. I termini residui dell' equazione differenziale somministrano $\frac{fr^{mn} X^m u^m dx}{A^m (r+x)^{mn}} = - Xdu$, o sia $\frac{fr^{mn} X^{m-1} dx}{A^m (r+x)^{mn}} = - \frac{du}{u^m}$, ed essendo $X^{m-1} = (r+x)^{mn-n} \times$

E

$E^{\phi - m\phi}$, farà $\frac{f r^{mn} E^{\phi - m\phi} dx}{A^m (r+x)^n} =$

$- \frac{du}{u^m}$; ed integrando, si ritrarrà

$$\frac{f r^{mn} E^{\phi - m\phi}}{(1-n) A^m (r+x)^{n-1}} = \frac{1}{(1-m) u^{m-1}} + \circ;$$

e quindi farà agevole l' inferire $u =$

$$\left(\frac{(1-n) A^m (r+x)^{n-1}}{(1-m) f r^{mn} E^{\phi - m\phi} - (1-n)(1-m) \circ A^m (r+x)^{n-1}} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Dunque $Xu = z =$

$$\left(\frac{(1-n) A^m E^{\phi - m\phi} (r+x)^{mn-1}}{(1-m) f r^{mn} E^{\phi - m\phi} - (1-n)(1-m) A^m \circ (r+x)^{n-1}} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Per determinare le costanti $\circ$, ϕ è d' uopo osservare, che allo svanire di x, z degenera in A; e però ne risulta $A =$

$$\left(\frac{(n-1)A^m E^{\Phi-m\Phi} r^{mn-1}}{(1-m)fr^{mn}E^{\Phi-m\Phi}-(1-n)(1-m)\Theta A^m r^{n-1}}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

ed $A^{m-1}=\dfrac{(1-n)A^m E^{\Phi-m\Phi}}{(1-m)frE^{\varphi-m\varphi}-(1-n)(1-m)\Theta A^m r^{n-mn}}$;

donde agevolmente s' inferisce $\Theta =$

$\dfrac{(1-m)fr^{mn+1-n}E^{\varphi-m\varphi}-(1-n)Ar^{mn-n}E^{\varphi-m\varphi}}{(1-n)(1-m)A^m}$; e questo valore sostituito nell' espressione di z dà la finale equazione $z =$

$$\left(\frac{(1-n)A^m(r+x)^{mn-1}}{(1-m)fr^{mn}-(1-m)fr^{mn+1-n}(r+x)^{n-1}+(1-n)Ar^{mn-n}(r+x)^{n-1}}\right)^{\frac{1}{m-1}}$$

$$=\left(\frac{(n-1)A^m(r+x)^{mn-1}}{(1-m)fr^{mn+1-n}(r+x)^{n-1}-(1-m)fr^{mn}+(n-1)Ar^{mn-n}(r+x)^{n-1}}\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Ri-

Riflessioni sopra il precedente Problema.

I.

ABbiamo finora tante volte nominati gl' *Infiniti*, e *Infinitesimi* di varj ordini, che potrebbe a taluno sembrare, che noi volessimo realizzare la nozione puramente intellettuale, ed astratta dell' *Infinito*, e attribuirgli quell'esistenza, che egli non ha, nè può avere per alcun modo. Per togliere adunque tutti gli equivoci, non sarà qui inutile di avvertire, che noi ci siamo serviti dei vocaboli usitati d'*Infinito*, e *Infinitesimo* come di un modo di dire facile e spedito, e di una espressione comoda e compendiosa per denotare, secondo la vera metafisica del Calcolo Infinitesimale, il *Limite Intellettuale* delle Quantità finite, supposte sempre crescenti nel primo caso, e sempre decrescenti nel secondo. Qualora poi abbiamo nominati gl' *Infiniti*, e *Infinitesimi dei varj ordini*, secondo, terzo, quarto ec.; allora non altro abbiamo voluto significare, se non se un mero *rapporto*, o anzi il *limite* dei rapporti sempre crescenti, o decrescenti oltre qualunque termine. Il cam-

biare quelle espressioni, comunemente adottate dai Geometri, e quasi consacrate dall'uso, sebbene poco esatte e precise, e sostituirne altre più giuste e rigorose, sarebbe un introdurre nel linguaggio de' Matematici una novità incomoda e forse dannosa, poichè non potendo farsi una tal mutazione se non col sostituire delle circonlocuzioni ai semplici vocaboli, si correrebbe rischio di portare l'oscurità nella sede medesima dell'evidenza rendendo inviluppata e prolissa una Lingua, il di cui pregio maggiore è la precisione e la brevità. Per somigliante ragione l'illustre Maclaurin chiude il suo gran Trattato delle Flussioni con dire di aver parlato di quando in quando degl' Infiniti, secondo lo stile ordinario degli Scrittori di questa materia; ma senza però essersi arrogata nell'uso di queste espressioni maggior libertà di quella che comunemente si accorda agli Autori che trattano delle parti inferiori della Matematica, soprattutto della Trigonometria, i quali nel determinare la tangente e la secante degli archi di cerchio ritrovando che niuna tangente o secante finita può appartenere al quadrante la marcano nelle tavole o col simbolo,

bolo, o col vocabolo d' *infinita*. *Hocque modo* (dice il Signor Euler nella bella Dissertazione dell' Uso delle Funzioni Discontinue nell'Analisi, inserita nel tomo XI. de' Nuovi Commentarj di Pietroburgo) *omnes controversiae, quae olim circa differentialia omnium ordinum eorumque naturam sunt motae, sponte concidunt, cum quicquid in hoc calculo definitur, semper ad proportionem differentialium, cujus realitas nulli dubio est subjecta, revocetur, neque amplius veritates per hunc calculum erutae Geometricis ullo pacto postponendae videbuntur. Equidem non diffiteor, ejusmodi rationes loquendi in hac disciplina esse receptas, quae differentialibus quantitatem quampiam valde exiguam tribuere videantur, sed cum earum significatio semper ex stabilitis principiis sit interpretanda, tales loquendi formulas, etsi minus congruas, tolerari convenit.*

La lettura dell'Opera citata di Maclaurin, della lodata Dissertazione del Signor Euler, degli articoli *Infinito*, *Differenziale*, *Flussione* del Signor D'Alembert nell'Enciclopedia, e del quinto tomo de' suoi Miscellanei, e della Dissertazione sopra l'Infinito del P. Gerdil nel secondo tomo degli Atti dell'Accademia di Torino sarà acquista-

quistare le idee chiare e precise, e le giuste ed esatte nozioni intorno ad una materia tanto delicata e spinosa, la quale essendo stata involta per molto tempo dai Geometri sotto il velo d'una metafisica sofistica e tenebrosa ha servito di pretesto ai Pirronici per farsi beffe dei Geometri e della Geometria. Le controversie, i clamori, le risse, le personalità suscitate fra i Geometri prima per determinare il vero Inventore del nuovo Calcolo, poi per fissarne la giusta e genuina nozione non hanno servito ad altro che ad imbrogliare una Scienza, che ha per insegna l'evidenza, e per divisa la precisione, e a far conoscere al Mondo Letterato, che i Matematici non sono sempre stati gli Uomini più dolci e pacifici della terra.

II.

Il famoso Canone di Fisica, che le densità dell' aria seguitino la ragione de' pesi che la comprimono, stabilito prima da Boyle, e Mariotte, confermato poscia dai più sagaci Sperimentatori, e contraddetto in parte da altri non meno chiari ed illustri, siccome può vedersi in qua-

quasi tutti i Libri di Fisica, è soggetto a due incomodi, o inconvenienti, che dir vogliamo, che rendonlo a taluni sospetto e dubbioso. Il primo inconveniente è l'altezza infinita dell'atmosfera, che quindi ne siegue, come abbiamo dianzi osservato; il secondo è l'impossibilità, che nasce da questa legge, di ridurre per qualunque massimo peso le particelle dell'aria al contatto, ovvero allo stato d'incompressibilità. Accenna e scioglie queste due difficoltà colla solita inimitabile leggiadria nella prima Parte del secondo tomo de' Commentarj di Bologna il gentilissimo Secretario dell'Instituto. „ Nemo ignorat (dic'egli), eam primum legem a praeclarissimis physicis in aeris elasticitate explicanda fuisse positam, ut si quo pondere comprimeretur aer, is in spatium adduceretur tanto minus, quanto pondus esset majus; ut pondera spatiis reciproce responderent. Nam cum tubum duo crura habentem constituissent, & aerem in breviori crure interclusum, affuso per crus longius hydrargyro, magis magisque compressissent, numquam non eam quam dixi proportionem invenerunt. Erat autem proportio brevis & simplex, & ad physi-

corum

corum usus maxime accommodata. Non ergo videbatur illis eripienda. Sed sunt quidam molesti, qui incommoda in omnibus aucupantur. Et alii quidem verentur, ne, si aer usque eo comprimatur, donec partes omnes se se contingant, proportio tunc demum deficiat; non enim si partes omnes se se contigerint, pondus augere proderit ad compressionem augendam. Recte illi quidem; ubi enim partes omnes se se contigerint, non elasticitate tantum resistent, quam aucti ponderis vis possit vincere, sed etiam soliditate, quam vincere vis nulla potest. Sed hi id verentur, quod haud scio, an accidere umquam possit; nam ante aerem vasa omnia perfregisse oportet, quacumque firmitate sint, quam eo pervenerit, ut partes ejus omnes propter compressionem se se contingant; neque huc perveniet, nisi ante in angustiam coactus fuerit tantam, quantam fingere nemo potest; ideoque physicorum prius oculos, & sensum omnem fugiet, quam id accidat, in quo proportio deficiat. Sunt alii, qui incommodum in infinitate quaerunt; nam si aer tanto latius se explicat, quanto minori premitur pondere; cum pondus minui in infinitum possit, videtur quoque aer, quantulus-

tulufcumque fit, in infinitum poffe explicari: quam illi infinitatem mirum quantum refugiunt. Et hos, credo, nihil fere in physica non deterrebit. Quae eft enim qualitas, aut corpus, aut omnino res ab omni infinitate fejuncta? Quid de vi repulfiva dicemus, quae fi tanto magis minuitur, quanto propagatur longius, nulla tanta longinquitas effe poterit, qua tandem fiat nulla; ideoque abibit & ipfa in infinitum. Et vero particulis aeris hanc repulfionem Newtonus tribuit, magnus auctor, & in hac elafticitatem ponit. Videant hi ergo, ne, infinitatem omnem cum reformident, timidiores fe praeftent, quam phyficos decet. Sed iftos pavidos relinquamus „.

Se pertanto la maggior parte de' Fifici giudica coll'appoggio dell'efperienza doverfi avere per accurata la mentovata legge Boyleana almeno fino a che l'aria non viene ad effere condenfata in uno fpazio quattro volte minore del naturale, noi abbiamo ogni ragione di adottare e confermare quefta opinione, poichè calcolando fu quefto dato le altezze del barometro nelle varie elevazioni fopra il livello del mare incontriamo, come ora vedraffi, rifultati mirabilmente concordi

coll'

coll' osservazione, e prossimi oltre ogni credere alla verità.

III.

Per ciò che spetta alla diminuzione della gravità nelle differenti altezze sopra la superficie terrestre, egli è indubitato, che non può una tal diminuzione farsi sentire in quelle altezze, alle quali si suol portare il barometro; e quindi è, che per l'uso pratico del Problema basta la formula semplicissima $z = AE^{-\frac{fx}{A}}$, fondata sull' ipotesi della gravità costante, ipotesi fisicamente vera per tutte le altezze accennate. Ma, siccome l' universalità del Problema non permetteva, che se ne limitasse la soluzione a quest' unica ipotesi, perciò si è supposto, che la gravità terrestre variasse, al variare delle distanze, in una ragione qualunque delle distanze medesime; e partendo da questo principio ci siamo poi incontrati in que' singolarissimi paradossi, de' quali abbiamo sopra recata la spiegazione e l'adequato scioglimento.

IV.

IV.

La forza premente dell'aria, che tiene sospeso il mercurio nel barometro, l'acqua nelle trombe ec. si suole comunemente misurare dal peso *assoluto* della colonna verticale atmosferica, la quale ha per base l'apertura del tubo. Questa opinione generalmente adottata, parlando a rigore e con filosofica precisione, non è meno erronea per essere universale. L'illustre Geometra Signor Daniello Bernoulli fu il primo a discoprirne il difetto e l'insussistenza. Questo insigne Fisico-Matematico dimostra nella sua Idrodinamica Sezione X., che rigorosamente parlando la pressione dell'aria sopra il mercurio del barometro non può aversi per eguale al peso *assoluto* della colonna aerea verticale, che ha per base l'orifizio del tubo; ma che la detta forza premente deve anzi misurarsi dal peso *relativo* di essa colonna, il qual peso *relativo* ritrovasi con prendere un quarto proporzionale a tutta la superficie terrestre, alla base della colonna, e al peso totale dell'atmosfera; teorema nuovo, singolare, e incontrastabile, e degno dei progres-

greſſi della moderna Fiſico-Matematica, e della mente e ſagacità Bernoulliana. Da queſta sì bella ed utile verità, fondata ſulla comunicazione per ogni lato libera e aperta di tutta l'aria che circonda queſto noſtro Pianeta, e ſullo ſtato permanente di equilibrio nell' aria medeſima, ne viene per legittima conſeguenza, che in tutti i Paeſi, e in tutti i Climi della Terra, e in tutte le ſtagioni dell'anno, ad aria quieta e tranquilla, l'altezza dei barometri al livello del mare, o in pari diſtanza dalla ſuperficie terreſtre dovrà eſſere ſempre la ſteſſa, malgrado l' inſigne differenza della ſpecifica gravità dell' aria ne' diverſi Climi, e nelle diverſe ſtagioni; fenomeno ſingolariſſimo, verificato dall' oſſervazione dentro i limiti di aſſai picciolo divario, e non mai ſpiegato nè inteſo. Di qui rendeſi eziandio manifeſta la fallacia del metodo d' inveſtigare la ſpecifica gravità dell'aria di una data regione mediante l' analogia, *come la differenza delle elevazioni verticali dei due punti, a cui ſi porta il barometro, alla differenza delle altezze del mercurio in queſti termini; così la gravità ſpecifica del mercurio a quella dell'*

aria.

aria. La gravità ſpecifica, che con queſto metodo ſi ritrova, volendo anche ſupporla uniforme per tutta la diſtanza verticale dei due punti, non è propriamente quella, che corriſponde all'aria del dato luogo, ma è unicamente la gravità ſpecifica *media* di tutta la croſta sferica aerea compreſa fra i detti due punti; ſiccome appunto la preſſione della colonna aerea verticale frappoſta agli ſteſſi due termini non equivale al ſuo peſo *aſſoluto*, ma ſolamente al peſo di lei *relativo*. Quindi finalmente ſi raccoglie, che a produrre le *Variazioni Barometriche*, che ſono ſtate finora l'inciampo de' Filoſofi e lo ſcandolo della Fiſica, ſi richiede ſempre una qualche cagione pronta e ſubitanea, la di cui azione celere e repentina incontri nell'inerzia dell'aria un oſtacolo a diffonderſi a un tratto per la maſſa intera di queſto fluido, onde non poſſa confonderſi in tutta quella gran mole e renderſi affatto inſenſibile l'alterazione, ſiccome avvenir dee di ogni altra cagione lenta e ſucceſſiva, la quale propagando e diſtribuendo agiatamente e ſenza oſtacolo la propria ſua attività per tutta la maſſa atmosferica non ne laſcia apparire l'effetto

H nella

nella variazione del barometro (*k*).

V.

Gioverà qui ora mostrare dentro quai limiti, e fino a qual grado di esattezza si accordi la Teoria colle osservazioni, scegliendone a tal uopo alcune delle più insigni, fatte dai più riputati Filosofi in questi ultimi tempi. Incominceremo dalla

---

(*k*) I dubbj ingegnosissimamente mossi dall' insigne Sig. D' Alembert contro il predetto Teorema Bernoulliano nelle sue Riflessioni sopra la Causa Generale de' Venti non pare che siano diretti a combattere la Verità del Teorema nel senso, in cui è stato proposto dal Sig. Bernoulli nella Sez. X. della sua Idrodinamica; giacchè nella Dissertazione del Flusso e Riflusso del Mare, d' onde lo ha tratto il Sig. D'Alembert, ne parla il Sig. Bernoulli per incidenza e alla sfuggita accennando la cosa, non illustrandola, nè curandosi di usare tutta l' esattezza per fissarne il vero e legittimo senso, siccome fa poscia di proposito nell' Idrodinamica, dove tratta ampiamente e discute un tal punto, e non dalla sola elasticità, come nella citata Dissertazione, ma dalla natura stessa del fluido ne ripete la dimostrazione.

dalla tanto famosa del Padre Feuillée, della quale già prima si è parlato; ma per procedere con maggior rigore converrà levare dall'altezza della montagna 150. tese per le ragioni prodotte dal Bouguer, ed assumere più esatto il rapporto della densità del mercurio a quella dell'aria, essendo fuor di dubbio, che

il rapporto di $1 : \frac{1}{11900}$ fissato da Cotes

è maggiore del giusto.

Esempio I.

Supposta adunque l'altezza corretta del Pico di Teneriffa di piedi 12258, ed assunto il rapporto, fra la densità del mercurio, e quella dell'aria, di $1 : \frac{1}{11200}$,

siccome ritrova l'illustre Sperimentatore Musschenbroek, si sostituiranno questi valori nella nota formola $lz = lA - \frac{fx}{A}$, o

piuttosto (trasmutando i logaritmi iperbolici in tavolari) nella formola $Lz = LA$ -

$- \frac{fx}{2.3025850\,A}$; e però posto $A = 334$ lin. (giacchè il mercurio al livello del mare si sosteneva nel barometro all' altezza di 27 polli, e 10 lin.), $x = 12258$ pied. $= 1765152$ lin., $f = \frac{1}{11200}$; risulterà $Lz = L334 - \frac{1765152}{2.3025850 \times 11200 \times 334}$ $= 2.5237465 - 0.2049282 = 2.3188183$, a cui corrisponde il numero 208. 6 lin., ovvero 17 poll., e 4. 6 lin.; e l'altezza osservata era di 17 poll., e 4. 9 lin. Dunque il calcolo cospira coll'osservazione dentro i limiti di tre sole decime d'una linea; accordo sorprendente, e molto maggiore (contro la nostra aspettazione) di quello che più sopra abbiamo ritrovato, e tanto più maraviglioso quanto più secondo il Sig. Bernoulli è ai Fisici incomoda e imbarazzante l'osservazione.

Un' altra rara e per tutte le circostanze singolarissima osservazione è quella fatta dal Bouguer, e dal Signor De la Con-

Condamine sulla montagna di Quito detta *Choussalong*, che ha 2476 tele di perpendicolo sopra il livello del mare. Questa è la maggior altezza, a cui sieno finora saliti gli Uomini, ed a cui sia stato portato il barometro; nè vi è molta apparenza, dice il Bouguer, che alcuno prima vi fosse stato, volendovi pure un motivo per intraprendere simili viaggj; e l'amore dell'oro, che agita e mette in moto tanta gente al Perù come altrove, non suole gran fatto stimolar gli Uomini ad abbandonar la pianura per arrampicarsi tra balze e tra dirupi alle orride cime delle più alte montagne. Prima di confrontare la Teoria con questa sì rara osservazione, studiamoci di fissare anche meglio il rapporto delle densità del mercurio, e dell'aria: e per ottenere, siccome richiede il Teorema Bernoulliano, la vera densità *media* dell'aria, e quindi il peso *relativo* della colonna aerea, come in fatti domanda il nostro Problema, nel quale la f non può esprimere se non appunto la *media* densità dell'aria, prevalghiamoci dell'analogia *come l'elevazione perpendicolare di un dato luogo sopra il livello del mare all'abbassamento del barometro portato in quel luogo,*

 così

così la densità del mercurio al quarto proporzionale, che sarà appunto la densità *media* dell' aria marittima. Ora trascorrendo il catalogo delle varie osservazioni relative a quest' articolo, delle quali avvene anche una tavola nelle Annotazioni del Musschenbroek ai Saggj dell' Accademia del Cimento, si raccoglie, che ne' luoghi bassi, e marittimi l' abbassamento di una linea nel mercurio del barometro corrisponde d'ordinario all'altezza perpendicolare di 70 in 80, o di 72 in 78 piedi francesi, ovvero prendendo il termine di mezzo, all' altezza di piedi 75; ond' è, che equilibrandosi una colonnetta di mercurio alta una linea con una d'aria, di ugual base, alta 75 piedi, saranno secondo i noti principj Idrostatici le loro gravità specifiche in ragione reciproca delle altezze, e però la gravità specifica dell' aria marittima starà a quella del mercurio come una linea a 75 piedi, oppure 10800. linee, e conseguentemente la densità *media* dell' aria bassa vicino alla terra sarà $\frac{1}{10800}$ della densi-

tà

tà del mercurio. Questo rapporto è da giudicarsi tanto più prossimo al vero, quanto che ritrovasi con sorpresa precisamente lo stesso, senza il minimo divario, con quello che si deduce dalla Tavola qui annessa delle altezze de' Monti del Perù, e del Barometro, calcolata già dal Bouguer per induzione da un gran numero di osservazioni fatte in quella parte di Mondo: imperciocchè vedesi nella detta Tavola, che all'altezza di 2988 tese il barometro si abbassa una linea se si monta per altre 25 tese; dal che è facile l'inferire, che la densità del mercurio sta alla densità *media* dell' aria in quell'altissima regione come stanno 25 tese, ovvero 21600 linee a una linea; e perchè alla detta altezza di 2988 tese l'aria è compressa dalla metà del peso ond' è premuta al livello del mare, stando ivi secondo la Tavola sospeso il mercurio nel barometro all'altezza di 14 pollici, cioè alla metà di quella che conserva vicino al mare; sarà perciò la densità *media* dell'aria marittima il doppio di quella che ha l'aria alla predetta altezza, ovvero il doppio

di $\frac{1}{21600}$, vale a dire sarà appunto

$\frac{1}{10800}$ della densità del mercurio. Un tal metodo di determinare il rapporto delle gravità specifiche dell' aria, e del mercurio prendendo per termine di comparazione l'aria molto alta, e riducendola alla compressione che soffrirebbe in vicinanza della superficie terrestre è di gran lunga meno fallace ed incerto degli altri metodi, ne' quali si suol fare a dirittura il confronto dell' aria bassa, come ritrovasi, col mercurio: imperciocchè nelle alte regioni dell'atmosfera, dove il calore, come più sotto indicheremo, è dappertutto regolare e uniforme, dove i venti o non dominano, o sono placidi e leggieri, dove l' elasticità degli strati è equabilmente distribuita, l'aria dee sempre ritrovarsi in uno stato tranquillo, e permanente, e di una densità sempre equabile, sicchè trasportata col pensiero al livello del mare, e compressa proporzionalmente venga a far conoscere la vera densità *media* dell' aria marittima; il che non

non è punto sperabile qualora si prende immediatamente per termine di confronto la stessa aria bassa nello stato, in cui ella è, agitata cioè continuamente dall' azione irregolare ed anomala d'un calore sempre vario e inconstante, dalla contrarietà e frequenza de' venti, dalle esalazioni, dai vapori, dall'aria stessa, che in gran copia si sviluppa da' corpi, e finalmente dalla tendenza all' equilibrio, che cerca sempre, e non ritrova mai. Determinata in tal modo con maggior accuratezza la gravità specifica *media* dell'aria bassa e terrestre passiamo all'

Esempio II.

RAcconta adunque il Bouguer nella Descrizione del viaggio al Perù premessa al suo Libro della Figura della Terra, che salito in compagnia del Signor De la Condamine sulla cima del monte Choussalong nel Paese di Quito sotto la Linea Equinoziale all'altezza di 2476 tese, il mercurio, che alla spiaggia del Mar Pacifico o del Sud segnava nel barometro 28 pollici, e 1 linea, restò sospeso a 15 pollici, e 9 linee. Pertanto nella

la formola $Lz = LA - \frac{fx}{2.\ 3025850\ A}$; essendo $A = 28$ poll. 1 lin. $= 337$. lin., $x = 2476$ tes. $= 2139264$ lin., $f = \frac{1}{10800}$, si avrà $Lz = L337 - \frac{2139264}{337 \times 10800 \times 2.\ 3025850} = 2.\ 5276299 - 0.\ 2552672 = 2.\ 2723627$, e però $z = 187.\ 22$ lin. $= 15$ poll., e 7. 22 lin., che differisce per meno di due linee dall' osservazione.

Questa differenza, la quale, sebben picciola in se stessa, è maggiore di quante abbiamo finora incontrate ne' molti e varj confronti fatti, ci fece sospettare di qualche imperfezione nell' osservazione, ed esaminata la cosa trovammo più che non bisogna per fondare il sospetto. In fatti per testimonianza del Signor De la Condamine nella sua *Introduct. Histor.* sei sole tese sotto la cima del Monte Chouffalong stava il mercurio a 14 pollici, e 10 linee, vale a dire una linea più alto di prima; quando per l' opposto è

fuori

fuori di dubbio, che per una linea di differenza nelle altezze del barometro non potevano bastare in tanta eminenza neppur venti tese di differenza nelle altezze delle stazioni. Per questa anomalia il celebre Musschenbroek nella sua *Introd. Ad Phil. Nat. tom. II.* §. 2184. forse un po' troppo facilmente si determina a dubitare, se la Legge di Mariotte abbia veramente luogo nell' alto della Cordigliera d'America, dove appunto a differenza della bassa regione dell' aria vuole l' illustre Bouguer che quella Legge esattamente si osservi, come può vedersi nella sua bella Dissertazione sopra le Dilatazioni dell' aria nell' atmosfera, inserita nelle Memorie dell' Accademia di Parigi del 1753. Anzi perchè appunto la progressione geometrica delle dilatazioni dell' aria non è che poco o punto alterata nelle alte regioni dell' atmosfera, come all' opposto dee pur esserlo al basso, vuole lo stesso Bouguer, che si debba onninamente abbandonare il comun metodo di ritrovare le altezze delle Montagne considerando il livello del mare come primo termine. Stabilisce egli adunque, che si prendano le

cose

cose pel verso contrario, e in vece di partire dal livello del mare come da primo termine fisso si parta da qualche punto altissimo delle superiori regioni dell'aria, dove l'*intensità del di lei elaterio è esattamente la stessa, e l'altezza del mercurio è nel medesimo tempo meno variabile*. In prova di questa opinione (che noi esamineremo in altro Opuscolo relativo a questo argomento) propone egli l'esempio dell'altezza del Monte d'Oro misurata geometricamente dal Cassini, e trovata di 1048. tese. Piglia per primo termine la cima altissima del Monte Pichinca nel Perù, dove il barometro marcava 15. pollici, e 11. linee, e l'altezza verticale del Monte arriva a 2434 tese; e fatto il confronto di questi due dati col terzo, cioè coll'altezza di 22 pollici, e 2 linee, a cui si fermò il barometro nelle mani del P. Sebastiano Truchet sull'altura del Monte d'Oro, ritrova, che questo Monte esser dee 1391 tese più basso dell'altro, ed avere in conseguenza 1043 tese di altezza, cioè a dire cinque sole di meno della misura Cassiniana. Ma questo esempio servirebbe anzi a combattere che a confermare l'opinione di Bouguer,

guer, quando ella non avesse altro appoggio; e ciò per due validissime ragioni: La prima, e la più forte si è, che la maggior parte delle altezze misurate dal Cassini nel suo Trattato della Grandezza e Figura della Terra soffre una correzione considerabile per essere state calcolate senza la refrazione; e corretta appunto da quest' errore l'altezza del Monte d'Oro ritrovasi di 1001 tese, siccome egregiamente dimostra nel suo elegantissimo Opuscolo intorno alla Via della Luce per l'Aria il sagacissimo Geometra Signor Enrico Lambert. In conseguenza il calcolo di Bouguer differirebbe di 42 tese dalla vera misura, differenza grandetta anzichè no. La seconda ragione si è, che pigliando il Bouguer per l'altezza corrispondente ai 15 pollici barometrici, e 11 linee quella di 2434 tese del Monte Pichinca non ha alcun riguardo (come pur conveniva che avesse) all'altezza media calcolata per induzione dallo stesso Bouguer sopra tutte le osservazioni fatte al Perù, la qual mezzana altezza, come vedesi nella Tavola qui appresso, è di 2464. tese per corrispondenza a 15 pollici, e 11 linee barometriche, suppo-

sta

sta l' altezza media barometrica nel mare del Sud di 28 pollici, e 1 linea. Ed in tal caso il calcolo di Bouguer darebbe 1073 tese per l' altezza del Monte d'Oro, cioè 72 tese di differenza dalla giusta misura. Vediamo ora in sì gran discrepanza qual risultato ci somministra la nostra formula

Esempio III.

DAll' equazione $Lz = LA - \frac{fx}{2.3025850A}$ si ricava immediatamente $x = \frac{2.3025850A}{f}(LA - Lz)$; e facendo, secondo i dati precedenti, $A = 336$ lin., $f = \frac{1}{10800}$, $z = 22$ poll. 2 lin. $= 266$ lin., sarà $x =$ $336 \times 10800 \times 2.3025850\ (L336 - L266)$ $= 336 \times 10800 \times 2.3025850 \times$ $(2.5263393 - 2.4248816) =$ $336 \times 10800 \times 2.3025850 \times 0.1014577$ $= 336 \times 10800 \times 0.2336149 =$ 3628800

$3628800 \times 0.2336149 = 847742$ lin. $=$ 981 tes., vale a dire 20 tese minore del giusto, laddove a Bouguer è riuscita 42, anzi 72 tese maggior del dovere.

Esempio IV.

A Rodes l'altezza mezzana del Barometro fu ritrovata di 25 pollici, e 8 linee, e l'elevazione del luogo misurata dal Sig. Cassini, e corretta dall'errore della refrazione dal Sig. Lambert è di tese 361. 8. Dunque nella formola $Lz = LA - \frac{fx}{2.\ 3025850\ A}$ sostituendo quest' ultimo valore ridotto in linee nascerà $Lz =$

$$L336 - \frac{312594}{10800 \times 336 \times 2.\ 3025850} =$$

$$2.5263393 - \frac{312594}{3628800 \times 2.\ 3025850} =$$

$2.5263393 - 0.\ 0374112 = 2.\ 4889281$; e quindi $z = 308\frac{1}{4}$ lin. $= 25$ poll., $8\frac{1}{4}$ lin., che eccede d'un solo quarto di linea l'altezza barometrica osservata.

Esem-

Esempio V.

L'Altezza di Bugarac secondo le misure del suddetto Sig. Cassini, e la correzione del Sig. Lambert è di tese 628. 4, e il mercurio segna quivi nel barometro 24 poll., 1 $\frac{1}{2}$ lin., supposta sempre di 28 pollici, come sopra, l'altezza barometrica al lido del mare. Nella solita formola $Lz = 2.5263393 - \frac{x}{3628800 \times 2.3025850}$, sostituendo per x 628. 4 tese, ovvero 542938 linee si ha

$$Lz = 2.5263393 - \frac{542938}{3628800 \times 2.3025850}.$$

$$= 2.5263293 - 0.0649787 = 2.4613646;$$

e $z = 289 \frac{2}{10}$ lin. $=$ 24 poll., 1 $\frac{3}{10}$ lin., che manca dall'osservata d'un solo quinto di linea.

Calcolando in tal guisa le altezze barome-

rometriche nelle varie eminenze geometricamente misurate dal Sig. Cassini nell' Opera citata, e rettificate dal Sig. Lambert nel suo elegantissimo Opuscolo sul Sentiero della Luce ritroviamo i seguenti risultati estremamente concordi all' osservazione:

TAVOLA

Nomi dei Luoghi.	Elevazione misurata dal Sig. Cassini, e corretta dal Sig. Lambert.	Altezza media del Barometro osservata.	Altezza del Barometro calcolata.	Differenza.
	Tese.	*Poll. Lin.*	*Poll. Lin.*	*Lin.*
Rodes.	361 . 8	25 : 8	25 : 8 $\frac{1}{4}$	+ $\frac{1}{4}$
Bugarac.	628 . 4	24 : 1 $\frac{1}{2}$	24 : 1 $\frac{3}{10}$	— $\frac{1}{5}$
Mousset.	1228 . 0	20 : 10 $\frac{2}{3}$	20 : 10 $\frac{4}{5}$	+ $\frac{2}{15}$
La Courlande.	801 . 3	23 : 2	23 : 1 $\frac{3}{5}$	— $\frac{2}{5}$
Puy de Dôme.	789 . 1	23 : 2 $\frac{1}{2}$	23 : 2 $\frac{1}{2}$	0
La Coste.	807 . 4	23 : 2	23 : 1 $\frac{1}{\ }$ [illegible]	— $\frac{3}{4}$
St. Barthelemi	1225 . 4	21 : $\frac{1}{2}$	21 : 0	— $\frac{1}{2}$
Massane.	408 . 3	25 : 4	25 : 4 $\frac{4}{5}$	+ $\frac{4}{5}$
Rupeyroux.	446 . 3	25 : 1 $\frac{1}{2}$	25 : 2 $\frac{1}{10}$	+ $\frac{3}{5}$

Si ſcorge qui, che l'errore è ſempre minore d'una linea, e che il più delle volte non giunge ad uguagliare mezza linea.

V I.

Avendo noi dianzi promeſſo di unire qui la Tavola Bougueriana ſopra le altezze de' Monti Peruviani, e le corriſpondenti depreſſioni barometriche, la ponghiamo ora ſotto gli occhi del Leggitore sì per la di lei rarità e ſquiſitezza, sì ancora per eſſere poco conoſciuta. E' ſtata queſta teſſuta con quella ſagacità e circoſpezione, che non ſi trovano ſe non negli Uomini grandi, dall' illuſtre Bouguer ricavandola per induzione da un gran numero di oſſervazioni fatte ſui Monti di Quito ſotto la Linea Equinoziale. Il celebre Sig. De La Condamine, compagno anch' egli ed autore di quelle oſſervazioni, comunicò queſta Tavola al Sig. Daniello Bernoulli, e queſto gran Geometra ne traſſe poſcia quegl'ingegnoſi corollarj, che nelle ſue *Rifleſſioni concernenti la Fiſica Generale* ſi leggono con tanto piacere. Noi ci riſerviamo a fare in altra occaſione una minuta analiſi di queſta Tavola. (*l*) TA-

(*l*) Queſta eſaminata a dovere (come allora proveremo) ſe per una parte ſomminiſtra la ſpiegazione di alcuni intralciati fenomeni, ſparge dall'altra molta oſcurità ed incertezza ſopra quelli, che comunemente credevaſi di meglio intendere, e di potere più diſtintamente ſpiegare.

TAVOLA

Delle Altezze delle Montagne del Perù dall' abbassamento del Mercurio nel Barometro.

Abbassamento del Mercurio.		Altezze delle Montagne.	
Pollici.	*Linee.*	*Tese*	*Diff.*
0	1	15	$14\frac{1}{2}$
	2	29	
	3	44	
	4	59	
	5	$73\frac{1}{2}$	
	6	88	
	7	103	
	8	$117\frac{1}{2}$	
	9	132	
	10	147	
	11	$161\frac{1}{2}$	
1	0	176	
	1	$190\frac{1}{2}$	
	2	205	
	3	220	
	4	$234\frac{1}{2}$	
	5	249	
	6	$263\frac{1}{2}$	
	7	278	
	8	293	
	9	$307\frac{1}{2}$	
	10	322	
	11	$336\frac{1}{2}$	
2	0	351	

TAVOLA
Delle Altezze delle Montagne del Perù dall' abbassamento del Mercurio nel Barometro.

Abbassamento del Mercurio.		Altezze delle Montagne.	
Pollici.	*Linee.*	*Tese*	*Diff.*
	1	366	
	2	380½	
	3	395	
	4	409½	
	5	424	
	6	439	
	7	453½	
	8	468	
	9	483	
	10	497½	
	11	512	
3	0	527	15
	1	542	
	2	556½	
	3	571½	
	4	586	
	5	601	
	6	616	
	7	631	
	8	645½	
	9	660½	
	10	675½	
	11	690½	
4	0	705½	

TAVOLA
Delle Altezze delle Montagne del Perù dall'abbassamento del Mercurio nel Barometro.

Abbassamento del Mercurio.		Altezze delle Montagne.	
Pollici.	Linee.	Tese	Diff.
	1	720½	
	2	735½	
	3	750½	
	4	765½	
	5	781	
	6	796	
	7	811	
	8	826½	15½
	9	842	
	10	857	
	11	873½	
5	0	888	
	1	903	
	2	919	15½
	3	931½	
	4	950	
	5	965	
	6	981	
	7	997	15½
	8	1012½	
	9	1028½	
	10	1044	16
	11	1060	
6	0	1076	

TAVOLA
Delle Altezze delle Montagne del Perù dall' abbassamento del Mercurio nel Barometro.

Abbassamento del Mercurio.		Altezze delle Montagne.	
Pollici.	*Linee*	*Tese*	*Diff.*
	1	1092	16
	2	1108	
	3	1124	
	4	$1140\frac{1}{2}$	
	5	$1156\frac{1}{2}$	
	6	1173	
	7	1189	$16\frac{1}{2}$
	8	$1205\frac{1}{2}$	
	9	1222	
	10	$1238\frac{1}{2}$	
	11	1255	
7	0	1272	
	1	$1288\frac{1}{2}$	17
	2	1305	
	3	1322	
	4	1339	
	5	1356	
	6	1373	
	7	1390	17 +
	8	1407	
	9	1424	
	10	$1441\frac{1}{2}$	
	11	1459	
8	0	$1476\frac{1}{2}$	

TAVOLA
Delle Altezze delle Montagne del Perù dall' abbassamento del Mercurio nel Barometro.

Abbassamento del Mercurio.		Altezze delle Montagne.	
Pollici.	*Linee.*	*Tese*	*Diff.*
	1	1494	17½
	2	1511½	
	3	1529	
	4	1547	
	5	1564	
	6	1583	
	7	1601	18
	8	1619	
	9	1637	
	10	1655	
	11	1673½	
9	0	1692	
	1	1710½	18 +
	2	1729	
	3	1747½	
	4	1766½	
	5	1785	
	6	1804	
	7	1823	19
	8	1843½	
	9	1861½	
	10	1881	
	11	1900	
10	0	1920	

TAVOLA

Delle Altezze delle Montagne del Perù dall' abbassamento del Mercurio nel Barometro.

Abbassamento del Mercurio.		Altezze delle Montagne.	
Pollici.	*Linee.*	*Tese*	*Diff.*
	1	1939½	19½
	2	1959½	
	3	1979	
	4	1999	
	5	2019	
	6	2039	
	7	2059½	20
	8	2079½	
	9	2100	
	10	2120½	
	11	2141	
11	0	2162	
	1	2182½	20½
	2	2203½	
	3	2224½	
	4	2246	
	5	2267	
	6	2288½	
	7	2310	21 +
	8	2331½	
	9	2353½	
	10	2375	
	11	2398	
12	0	2419	

TAVOLA

Delle Altezze delle Montagne del Perù dall'abbaffamento del Mercurio nel Barometro.

Abbaffamento del Mercurio.		Altezze delle Montagne.	
Pollici.	*Linee.*	*Tefe*	*Diff.*
	1	2441½	22
	2	2464	
	3	2486½	
	4	2509	
	5	2531½	
	6	2554½	
	7	2577½	22½
	8	2600½	
	9	2624	
	10	2647	
	11	2670½	
13	0	2694	
	1	2718	23 +
	2	2742	
	3	2766	
	4	2790	
	5	2814½	
	6	2839	
	7	2863½	24
	8	2888	
	9	2913	
	10	2938	
	11	2963	
14	0	2988	

V I I.

Uno dei rari e pellegrini ritrovati, di cui siamo debitori alla famosa Spedizione degli Accademici Francesi inviati al Perù per decidere la gran Questione della Figura della Terra, è l'osservazione fatta dal rinomato Bouguer sulle alture della Cordigliera del Perù sotto l'Equatore, ed analizzata con grand'arte nella sua bella Dissertazione sopra le *Dilatazioni dell' Aria nell'Atmosfera*, cioè a dire che rappresentandosi le elevazioni dei Luoghi colle ascisse d'una Logaritmica, le ordinate corrispondono con estrema esattezza alle altezze barometriche nelle alte regioni dell'aria, secondo la legge altronde già nota; ma che questa legge non più si osserva quando si discende al basso incominciando in una certa vicinanza alla superficie terrestre ad allontanarsi sensibilmente dal vero. Conseguenza immediata di sì bella osservazione si è, che nell'alta atmosfera regnar dee un grado di calore uniforme e costante, per cui non resti punto alterata la regolarità delle due progressioni, l'una aritmetica per le elevazioni verticali de' Luoghi, l'altra geometrica per le altezze corrispondenti del baro-

barometro, regolarità alterata nella bassa atmosfera per le tante anomalie e variazioni di caldo, di freddo, di esalazioni, di vapori, di venti, di pioggie, che quivi regnano di continuo. „ La premiere consequence (dice nel luogo citato il Sig. Daniello Bernoulli) qu' on peut tirer de cette importante observation de M.r Bouguer, est, qu' il règne un même degré de chaleur dans toute l'atmophère, aprés s'être élevé seulement de 1000 toises par-dessus la surface de la mer; Il se peut à la vérité, que l'air qui touche immédiatement la terre des montagnes, ou qui en est tout prés, n' ait pas tout-à-fait cette température commune; mais il est certain qu' à une trè-petite distance de cette terre l'air ne sauroit manquer de la prendre. Voici donc comment on pourra envisager la chose; qu'on fasse abstraction des montagnes, & qu' on considère la surface de la terre comme parfaitement unie, je dis qu'on n' auroit qu'à s'élever de 1000 toises par-dessus cette surface, peut-être même de beaucoup moins, pour sentir partout à peu près une même température, tant près des Poles que près de l'Equateur. Cette remarque nous four-

fournit la raison de plusieurs vérités connues par experience ,,. Cerca poscia il Sig. Bernoulli colla sua solita sagacità per mezzo della Tavola Bougueriana qual debba essere il grado di calore nell'alta atmosfera incominciando all'elevazione verticale di 1000 tese sopra la superficie del mare, e ritrova, che sotto la Linea il calore dell'aria vicino al mare sta a quello dell'aria all'altezza di 1000 tese nella ragione di 6 a 5, che è a un dipresso la ragione del caldo de' nostri grandi Estati a quello de' grandi Inverni; cosicchè supponendosi il calore mezzano sotto la Linea uguale a quello de' nostri più cocenti Estati, il calore comune dell'alta atmosfera a incominciare dall'altezza di 1000 tese verrà a corrispondere assai davvicino a quello de' nostri più rigidi Inverni. Ed ora s'intende : perchè ne' paesi caldi il freddo cresce più che si sale per le alte montagne : perchè ne' paesi estremamente freddi succede per appunto il contrario : perchè ne' climi temperati non è granfatto sensibile la variazione qualora si ascende d'inverno: perchè a Quito alto da 1400 in 1500 tese, sotto l'Equatore, regna una tem-

peratura sempre la stessa, e sempre assai fredda: e perchè finalmente i Signori Condamine, e Bouguer all' altezza di 2500 tese ebbero a morir di freddo nel bel mezzo della Zona Torrida. Questa bella importantissima verità, che la temperatura dell' aria libera, superata l' altezza di 1000 tese, in tutti i climi, e in tutti i paesi della Terra dalla Zona Torrida alle Zone Glaciali, dall' Equatore al Polo sia costantemente uniforme e sempre la stessa, ha un fondamento reale nella natura e nell' ordine delle cose: L' aria, corpo fluidissimo, leggerissimo, e diafano, non può ricevere dai raggj del Sole, che liberamente vi passano attraverso, se non se un picciolissimo grado di calore; laddove la crosta esteriore della Terra, che assorbisce, ritiene, agita, e riflette i raggj che vi piovono sopra, a ragione della varia obliquità deve esserne estremamente riscaldata nella Zona Torrida, mezzanamente nelle Zone Temperate, e pochissimo nelle Gelate; la qual disuguaglianza di calore potrà ben comunicarsi e farsi sentire nell' aria vicina alla crosta medesima, ma superata una certa distanza non può propagarsi più oltre.

VIII.

VIII.

Il più volte lodato Sig. Lambert attesta nella sua Operetta sopra la Strada della Luce per l'Aria, che avendo pigliate per ascisse le altezze barometriche osservate, e per ordinate le elevazioni dei Luoghi misurate dal Cassini, e corrette dall'errore della refrazione, la Curva, che passa per questi punti determinati, è riuscita così regolare come se questi punti fossero stati espressamente collocati ne' luoghi per dove essa doveva passare, non allontanandosene fuorchè di alcune poche tese al più. Un tal accordo inaspettato impegnò il Sig. Lambert ad applicarvi una formola, per mezzo della quale egli calcolò una tavola delle elevazioni perpendicolari dei luoghi sopra la superficie del mare, e delle corrispondenti altezze del barometro nel suo stato di mezzo. A questa Tavola Lambertiana ne aggiungiamo qui un' altra di fronte calcolata da noi, estremamente d' accordo con quella, e forse ancor più vicina a quelle poche osservazioni meno sospette, colle quali abbiamo potuto farne il confronto. Il metodo da noi tenuto nel tessere questa tavola, e la formola, che ci ha servito

vito di norma, e le ragioni e i fondamenti di detta formola saranno spiegati e discussi in altro Libretto, dove ci faremo a considerare sott'altro aspetto questo stesso interessante argomento. Per ora ci basterà di avvertire, che uno degli elementi della nostra formola è la Densità dell'aria, supposta non più proporzionale ai pesi comprimenti, ma bensì ad una tal funzione di essi, che non si annulla all'annullarsi de' pesi, che cresce sensibilmente in ragione de' pesi sino al termine del quadruplo accrescimento, e che passato questo termine cresce in una ragione minore di quella de' pesi comprimenti. E' cosa per altro degna di considerazione, che le elevazioni dei Luoghi calcolate sulla formola semplicissima delle Densità proporzionali ai semplici pesi prementi ritrovansi pochissimo discordanti da quelle della Tavola. In fatti

1.° Piglisi per esempio l'altezza barometrica di 24 pollici, e nella formola $x = \frac{2.3025850 A}{f} (LA - Lz)$, posto $f = \frac{1}{10800}$, $A = 28$ poll., $z = 24$ poll.; risul-

risulta $x = 28 \times 10800 \times 2.3025850 \times (L28 - L24) = 302400 \times 2.3025850 \times (1.4471580 - 1.3802112) = 302400 \times 2.3025850 \times 0.0669468 = 46515$ poll. $= 646$. tes., che supera di una sola tesa il numero della Tavola.

2.° Facciasi $z = 22$ poll., e si otterrà $x = 302400 \times 2.3025850\,(LA - Lz) = 302400 \times 2.3025850 \times 0.1047353 = 72927$ poll. $= 1013$ tes., che manca di due tese e mezza dal risultato della Tavola.

3.° Si prenda finalmente $z = 18$ poll., e ritroverassi $x = 302400 \times 2.3025850 \times (LA - Lz) = 302400 \times 2.3025850 \times 0.1918855 = 133611$ poll. $= 1856\ \frac{1}{3}$ tes., che cala d'un poco meno di 21 tese dal tavolare.

Ta-

Tavola delle Altezze Barometriche corrispondenti alle elevazioni dei Luoghi sopra il livello del Mare.

Altezza del Barometro	Elevazioni dei Luoghi calcolate dal Sig. Lambert	Elevazioni dei Luoghi calcolate da noi
27 : 11	12, 0	11, 5
- - 10	24, 1	23, 7
- - 9	36, 3	35, 8
- - 8	48, 6	47, 9
- - 7	60, 9	60, 0
- - 6	73, 3	72, 8
- - 5	85, 7	85, 3
- - 4	98, 2	97, 9
- - 3	110, 8	110, 1
- - 2	123, 3	122, 7
- - 1	136, 0	135, 3
27 : 0	148, 7	147, 9
26 : 11	161, 4	160, 8
- - 10	174, 4	173, 6
- - 9	187, 4	186, 7
- - 8	200, 4	199, 8
- - 7	213, 4	212, 6
- - 6	226, 5	225, 7
- - 5	239, 7	238, 9
- - 4	252, 9	252, 0
- - 3	266, 2	265, 1
- - 2	279, 6	278, 5
- - 1	293, 1	292, 0
26 : 0	306, 6	305, 4

Tavola delle Altezze Barometriche corrispondenti alle elevazioni dei Luoghi sopra il livello del Mare.

Altezza del Barometro	Elevazioni dei Luoghi calcolate dal Sig. Lambert	Elevazioni dei Luoghi calcolate da noi
25 : 11	320, 1	318, 9
- - 10	333, 7	332, 2
- - 9	347, 3	345, 9
- - 8	361, 1	359, 8
- - 7	374, 8	373, 0
- - 6	388, 7	386, 9
- - 5	402, 5	400, 7
- - 4	416, 5	414, 6
- - 3	430, 5	428, 5
- - 2	444, 6	442, 5
- - 1	458, 7	456, 6
25 : 0	472, 8	470, 6
24 : 11	487, 0	484, 8
- - 10	501, 2	498, 9
- - 9	515, 5	513, 2
24 : 8	529, 3	526, 9
- - 7	544, 4	542, 0
- - 6	558, 8	556, 3
- - 5	573, 4	570, 9
- - 4	588, 0	585, 4
- - 3	602, 7	600, 1
- - 2	617, 3	614, 7
- - 1	632, 1	629, 4
24 : 0	647, 9	645, 1

Tavola delle Altezze Barometriche corrispondenti alle elevazioni dei Luoghi sopra il Livello del Mare.

Altezza del Barometro	Elevazioni dei Luoghi calcolate dal Sig. Lambert	Elevazioni dei Luoghi calcolate da noi
23 : 11	661, 8	658, 9
- - 10	676, 8	673, 8
- - 9	691, 8	688, 7
- - 8	706, 8	703, 6
- - 7	721, 9	718, 6
- - 6	737, 1	733, 7
- - 5	752, 5	749, 0
- - 4	766, 6	763, 0
- - 3	783, 0	779, 3
- - 2	798, 4	794, 6
- - 1	813, 9	810, 0
23 : 0	829, 5	825, 5
22 : 11	845, 0	840, 9
- - 10	860, 7	854, 5
- - 9	876, 4	872, 1
- - 8	892, 2	877, 8
- - 7	908, 0	903, 5
- - 6	924, 0	919, 4
- - 5	940, 0	935, 3
- - 4	956, 1	951, 3
- - 3	972, 2	967, 3
- - 2	988, 3	983, 3
- - 1	1004, 4	999, 3
22 : 0	1020, 8	1015, 6

Tavola delle Altezze Barometriche corrispondenti alle elevazioni dei Luoghi sopra il Livello del Mare.

Altezza del Barometro	Elevazioni dei Luoghi calcolate dal Sig. Lambert	Elevazioni dei Luoghi calcolate da noi
21 : 11	1037, 1	1031, 8
- - 10	1053, 5	1048, 1
- - 9	1069, 9	1064, 4
- - 8	1086, 4	1080, 8
- - 7	1103, 0	1697, 3
21 : 6	1119, 7	1113, 9
21 : 5	1136, 4	1130, 5
- - 4	1153, 2	1147, 2
- - 3	1170, 1	1154, 1
- - 2	1187, 1	1181, 0
- - 1	1204, 1	1197, 9
21 : 0	1221, 2	1214, 9
20 : 11	1238, 4	1232, 0
- - 10	1255, 6	1249, 1
- - 9	1272, 9	1266, 3
- - 8	1290, 3	1283, 6
- - 7	1307, 7	1300, 9
- - 6	1325, 3	1318, 4
- - 5	1342, 7	1335, 7
- - 4	1360, 4	1353, 3
- - 3	1378, 1	1370, 9
- - 2	1396, 1	1388, 8
- - 1	1413, 9	1406, 5
20 : 0	1431, 8	1424, 3

Tavola delle Altezze Barometriche corriſpondenti alle elevazioni dei Luoghi ſopra il Livello del Mare.

Altezza del Barometro	Elevazioni dei Luoghi calcolate dal Sig. Lambert	Elevazioni dei Luoghi calcolate da noi
19 : 11	1449, 8	1442, 2
- - 10	1467, 9	1460, 2
- - 9	1486, 1	1478, 3
- - 8	1504, 4	1496, 5
- - 7	1522, 8	1514, 6
- - 6	1541, 2	1532, 8
- - 5	1559, 7	1551, 1
- - 4	1578, 3	1569, 5
- - 3	1597, 0	1588, 0
- - 2	1615, 7	1606, 5
- - 1	1634, 5	1625, 1
19 : 0	1652, 5	1642, 9
18 : 6	1768, 0	1758, 2
18 : 0	1887, 4	1877, 4
17 : 6	2009, 3	1999, 1
17 : 0	2134, 8	2124, 2
16 : 6	2264, 0	2253, 2
16 : 0	2397, 3	2386, 1
15 : 6	2534, 9	2523, 3
15 : 0	2677, 0	2665, 0
14 : 6	2824, 0	2811, 6
14 : 0	2976, 0	2963, 1

Per ciò che spetta alla queſtione accennata del rapporto, in cui creſce la denſità dell'aria atmosferica, ci riſerviamo ad eſaminare in altro Opuſcolo il caſo ſingolare quando m, e t ſono numeri diſpari, che rende immaginario il valore della formola differenziale qualora ſi traſporta il barometro di là dal centro terreſtre.

Potrebbeſi dalla propagazione del Suono ricavare ſpeditamente il rapporto, con cui va creſcendo la denſità dell'aria compreſſa da diverſi peſi, e ritroverebbeſi, che un tal rapporto è $\frac{100}{106}$:plicato di quello de' peſi, vale a dire che le denſità dell'aria creſcono come le radici 106 :eſime delle centeſime potenze de' peſi comprimenti, proporzione aſſai vicina alla ſemplice ragione de' peſi (m). In fatti ſe nella nota formola della velocità del Suono $\sqrt{\frac{2bE}{DT^2}}$ (nella quale E indica l'elaſticità naturale dell'aria, D la ſua denſità, e b lo ſpazio che un corpo grave traſcorre liberamente cadendo nel

(m) L'eminente Geometra Sig. De La Grange nelle ſue immortali Ricerche ſopra la Natura e Propagazione del Suono determina il rapporto delle denſità dell' aria come le radici quadrato-quadrate dei cubi de' peſi comprimenti, rapporto un po' troppo lontano dal vero, come egli ſteſſo confeſſa.

nel tempo T) si fa E proporzionale a qualche potenza di D, cioè a D^{λ}, dimostra il profondo Geometra Sig. De la Grange nel secondo tomo de' Miscellanei dell' Accad. di Torino, che la velocità del Suono qual si ha dalla Teoria fondata sull' ipotesi, che l' elasticità dell'aria sia esattamente proporzionale alla densità, verrebbe ad essere aumentata nella ragione della radice del differenziale di D^{λ} diviso per quello di D all' unità. Quindi è, che essendo per la Teoria $\sqrt{\frac{2bE}{DT^2}}, = 919$ piedi francesi per secondo, si otterrà, per l' ipotesi di E proporzionale a D^{λ}, la velocità del Suono $= 919\sqrt{\lambda D^{\lambda-1}} = 919\sqrt{\lambda}$ prendendo per D l' unità. Ma secondo le più esatte esperienze fatte nel 1738, e 39 per ordine dell'Accademia di Parigi dagl' illustri Cassini, Maraldi, e La Caille il suono scorre in un secondo piedi 1040 (prendendo il numero di mezzo fra il 1038, e il 1042).

Dunque avrassi $919\sqrt{\lambda} = 1040$, e $\sqrt{\lambda} = \frac{1040}{919} = 1.1316$, e finalmente $\lambda = 1.06$ molto poco differente dall' unità. Sarà in conseguenza P (cioè il peso comprimen-

te che è la vera misura dell'elasticità) proporzionale a $D^{1.06}$, e però D proporzionale a $P^{\frac{100}{106}}$, che è una proporzione un pochetto minore di quella de' pesi comprimenti, siccome in fatti esser dee secondo le esperienze almeno al di là della quadrupla compressione. Il rinomato Sig. Sulzer nelle Memorie dell'Accad. di Berlino del 1753 da alcune sue esperienze ritrova contro la comune opinione D proporzionale a $P^{1.0015}$, vale a dire la densità crescente in maggior ragione de' pesi comprimenti contro il comun parere de' più accurati Sperimentatori: ma quando poi egli vuol applicare questo dato a un' osservazione, che egli chiama esattissima, per determinare l'altezza d' una montagna, si trova lontano per 400 piedi dalla vera misura. Il Sig. De La Grange dalla sua ipotesi, che D sia proporzionale a $P^{\frac{1}{4}}$, ne inferisce, che diventando la densità dupla, tripla, quadrupla ec., i pesi comprimenti sorpassano i numeri della progressione aritmetica 2, 3, 4, ec. di circa $\frac{518}{1000}$, 1 $\frac{326}{1000}$, 2

$2\frac{349}{1000}$; le quali *differenze* (soggiunge egli) *sembrano per verità troppo forti perchè si possa ragionevolmente supporre, che sieno sfuggite alla sagacità dei dotti Fisici, i quali determinarono coll' esperienza le leggi della compressione dell' aria.* Nella nostra ipotesi di *P* proporzionale a $D^{1.06}$, crescendo *D* come i numeri 1, 2, 3, 4 cresce *P* come 1, $2^{1.06}$, $3^{1.06}$, $4^{1.06}$, che è quanto dire fatte le debite riduzioni come 1, 2.08, 3. 20, 4.34, i quali non differiscono tanto dai numeri naturali 1, 2, 3, 4, che le loro differenze non possano aver ingannata l' attenzione degli Sperimentatori. Cresciuto poi *D* oltre il quadruplo, e fatto per es. 8, si vede il *P* sorpassare di molto la *D*, diventando $P = 8^{1.06} = 9.06$, che supera l'otto di $1\frac{6}{100}$; il che è conforme ai ritrovati dei Fisici più celebri.

Concludiamo, che in una materia sì dilicata e sdegnosa manca ancora un numero sufficiente di esatte osservazioni per chi non vuol navigare senza bussola e senza vela nel mare dei possibili, e delle ipotesi. Il libro insigne del Signor De Luc già da molti anni promesso, e aspettato con impazienza da

tut-

tutti gli Amatori della buona Fisica, pel numero, e per la scelta delle più accurate osservazioni a giudicarne dai Saggj finora veduti dovrà sparger gran lume sopra questo oscuro argomento. Ed intanto dovrà servire di emblema a tutti i veri Filosofi il sensatissimo detto dell' illustre Sig. De Fouchy nella Storia dell' Accademia delle Scienze del 1753, cioè che quanto più si conosce la natura, tanto più si va lento e guardingo a concludere da un picciol numero di osservazioni una Teoria generale.

AP-

APPENDICE.

Essendosi fatto nell' antecedente Problema un uso così grande e continuo del numero E, che ha per suo logaritmo iperbolico l' unità, credesi di non far cosa discara ai Lettori Geometri con accennare qui alcune assai belle proprietà, non so se da altri osservate, di quel numero maraviglioso, dedotte dalla Teoria de' Massimi e Minimi.

Chiamo m, ed n qualunque numero intero, rotto, positivo, negativo. Nomino pari, o dispari anche il rotto, il quale ridotto ai minimi termini ha il numeratore pari, o dispari.

I. Se si cerca un numero tale, che innalzandolo alla potenza d' un determinato esponente m, ed alzando parimente il di lui logaritmo alla potenza d' un dato esponente n, il prodotto delle due potenze sia un *Massimo*, o un *Minimo*, il numero ricercato trovasi essere $\frac{1}{E^{\frac{n}{m}}}$.

Per discernere i Massimi dai Minimi in questo Problema, quattro casi sono da distin-

distinguersi : 1.° m è positivo , n negativo ; 2.° m è negativo , n positivo ; 3.° m , ed n sono positivi ; 4.° m , ed n sono negativi. Nel primo caso l' indicato prodotto è un *Minimo* ; nel secondo caso un *Massimo* ; nel terzo un *Minimo* se $n-1$ è pari , un *Massimo* se $n-1$ è dispari ; nel quarto finalmente quel prodotto è un *Massimo* se $n-1$ è pari , un *Minimo* se $n-1$ è dispari.

II. Se vuolsi un numero , il quale diventi un *Massimo* , o un *Minimo* alzandolo ad una potenza , il di cui esponente sia la potenza d' un dato grado m del medesimo numero ; scopresi il numero voluto $= \dfrac{1}{E^{\frac{1}{m}}}$. La predetta potenza forma un *Massimo* , se m è negativo ; un *Minimo* , se m è positivo ; nè l' uno , nè l' altro , se m è zero.

III. Se trattasi di dividere un dato numero p in tante parti uguali per modo, che innalzando ciascuna parte alla potenza d' un dato esponente m , e moltiplicando insieme tutte quelle potenze risulti un prodotto *Massimo* , o *Minimo* ; ritrovasi E per l' espressione del valore di

di cadauna parte, e $\frac{p}{E}$ pel numero di tutte le parti. Il mentovato prodotto costituisce un *Massimo*, se m è positivo; un *Minimo*, se m è negativo.

IV. Se addimandasi un numero tale, che diventi *Massimo*, o *Minimo* ciò che risulta dall' innalzare il di lui logaritmo ad una potenza, la quale abbia per esponente una potenza d' indice m dello stesso logaritmo, il numero dimandato è $= E^{E^{-\frac{1}{m}}}$. Diventa *Minimo* quel risultato, se l' indice m è positivo; *Massimo*, se è negativo.

Dico logaritmo *secondo* il logaritmo del logaritmo, logaritmo *terzo* il logaritmo del secondo, logaritmo *quarto* quello del terzo, e così discorrendo.

V. Se cercasi un numero tale, che la potenza di esponente m del suo logaritmo primo moltiplicata per la potenza di grado n del suo logaritmo *secondo* venga a produrre un *Massimo*, o *Minimo*

nimo; si trova detto numero $= E^{E^{-\frac{n}{m}}}$.
Per discernere i Massimi dai Minimi, si adopra qui il criterio del num.° I.

VI. Se si vuole un tal numero, che il suo logaritmo *secondo* innalzato alla potenza d'indice *m*, e moltiplicato per la potenza d'indice *n* del logaritmo *terzo* produca un *Massimo*, o *Minimo*; quel numero è $= E^{E^{E^{-\frac{n}{m}}}}$. La regola per distinguere i Massimi dai Minimi è come sopra.

VII. Finalmente se si domanda un numero, il cui logaritmo di ordine $r-1$:^{esimo} innalzato alla potenza di grado *m*, e moltiplicato per la potenza di grado *n* del logaritmo *r*:^{esimo} costituisca un *Massimo*, o un *Minimo*; scopresi il detto numero $= E^{E^{E^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{E^{-\frac{n}{m}}}}}}}}$, ripetendo tante volte

te l'E quante sono le unità in r. Per distinguere i *Massimi* dai *Minimi* corre sempre il criterio del num.° I.

E' di per se manifesto, che tutte queste proprietà sono applicabili alle Curve Esponenziali, nelle quali il numero incognito anzidetto rappresentando l'ascissa, e la funzione proposta di esso numero esprimendo l'ordinata vuolsi rintracciare quel tal valore dell'ascissa, il quale costituisca l'ordinata *Massima*, o *Minima*. Così, per dare un esempio, è facile l'inferire dal num.° II., che nella famosa Curva Bernoulliana, la di cui area corrispondente all'ascissa 1 viene rappresentata dalla convergentissima serie ritrovata da Giovanni Bernoulli, e tanto celebrata da Leibnitz, $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} +$ ec., la natura della qual Curva è di aver sempre la sua ordinata uguale a quella potenza dell' ascissa, che ha per indice l'ascissa medesima; in questa Curva appunto il valore di quell'ascissa, a cui corrisponde l'ordinata *Minima*, è $= \frac{1}{E} = 0.3678794$,

e la

e la *Minima* ordinata è $= \frac{1}{E^{\frac{1}{E}}} = \frac{1}{\sqrt[E]{E}} =$ 0. 6922005.

Si tralascia qui per brevità la dimostrazione di questi curiosi Teoremi: oltre ad esser ella fuori di luogo, sarebbe inutile così per li Geometri, come per gli altri; per quelli, perchè sapranno, volendo, di per se ritrovarla; per questi, perchè non può essere espressa nel loro linguaggio. In altra occasione dimostreremo alcuni nuovi maravigliosi accidenti delle Serie, che si formano componendo insieme i logaritmi dei varj ordini del numero *E*, e le varie potenze, e funzioni dei medesimi; speculazione amenissima, a cui s'invitano i Geometri, ai quali non parrà certamente indegna di occupare per alcun tempo la loro sagacità, ed avranno occasione di scoprire e dimostrare molte altre bellissime proprietà, che in questa scarsezza d'ozio, e d'ingegno possono aver delusa la nostra attenzione.

MDCCLXXI. die XV. Augusti.
Imprimatur
ASSANDRI Regius Senator Mediol. Papiæ Prætor prò Magistratu rei Litterariæ procurandæ.

J. C. Joseph Gandini Cancell.